VISIT…

уравнение (3) определяет (ньютонову) *несжимаемую вязкую жидкость*.

Легко учесть, как действует сила тяжести на твердое тело, погруженное в подобную жидкость, используя следующий принцип [1]).

Теорема 1. *Для вязкой жидкости с постоянной плотностью* ρ_0 *гравитационный эффект эквивалентен наложению гидростатического давления* $\rho_0 G$.

Доказательство. Полагая в уравнении (3) $g_i = -\partial G/\partial x_i$, где G — гравитационный потенциал, мы получим в результате уравнение

$$\frac{Du_i}{Dt} + \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad}\tilde{p} = \nu\nabla^2 u_i, \qquad \text{где } p = \tilde{p} + \rho_0 G. \tag{5}$$

Предостережение. Заметим, что преобразование теоремы 1 не сохраняет обычного краевого условия на «свободной поверхности» $p = \text{const}$ для границы газ—жидкость. Следовательно, оно бесполезно при изучении волн на поверхности и кавитации (гл. III).

Для того чтобы получить из уравнений (3) и (4) корректно поставленную краевую задачу, вместо уравнения (7) гл. I введем краевое условие прилипания [2]) в следующем виде:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \text{ на любой фиксированной границе.} \tag{6}$$

(На движущихся границах $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ — скорости движения границы, в то время как в невязком случае требуется, чтобы была непрерывной только нормальная составляющая скорости.)

Напомним также основной принцип подобия.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ *удовлетворяет уравнениям* (3), (4) *и* (6) *при* $\rho = \text{const}$. *Если величины* V, L, ν, V', L', ν' *постоянные и такие, что* $VL/\nu = V'L'/\nu'$, *то*

$$\mathbf{u}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{V'}{V}\right)\mathbf{f}\left(\frac{L\mathbf{x}}{L'}, \frac{LV't}{L'V}\right) \tag{7}$$

также удовлетворяет уравнениям (3), (4) *и* (6), *где проведена замена* ρ *на* ρ' *и* p *на* p', *причем*

$$p' - \rho' G = \frac{\rho' V'^2}{\rho V^2}(p - \rho G). \tag{8}$$

[1]) Karman Th., *J. Aer. Sci.*, 8 (1941), 337—356. В невязком случае этот результат получен Даламбером, Théorie de la résistance des fluides, статьи 48, 56, 91, и Аванцини (1807).

[2]) О значении этого условия мы скажем в § 34.

Другими словами, любое изменение масштаба (в пространстве и времени), сохраняющее неизменным *число Рейнольдса* $VL/\nu = \rho VL/\mu = \mathrm{Re}$, переводит несжимаемые течения, удовлетворяющие уравнениям Навье — Стокса, в решения тех же самых уравнений.

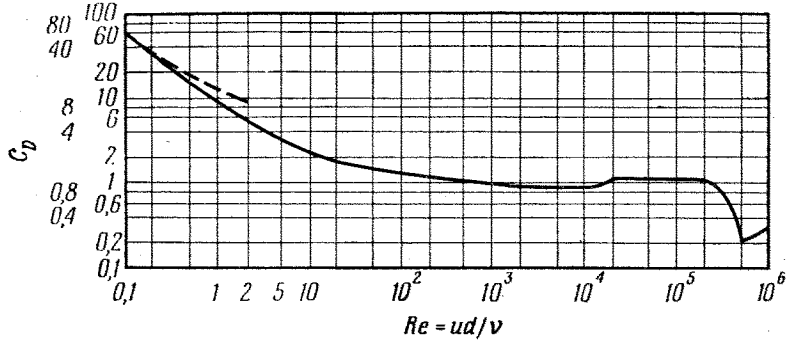


Рис. 7а. C_D (Re) для цилиндра.

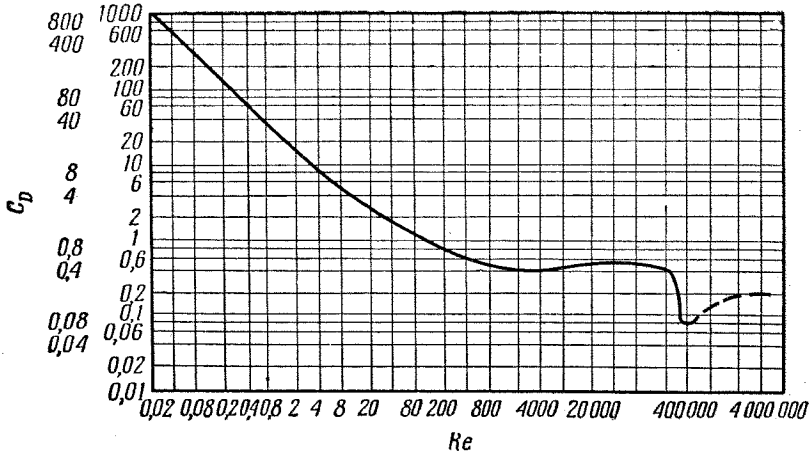


Рис. 7б. C_D (Re) для сферы.

Следствие. Если два стационарных течения удовлетворяют краевой задаче (3), (4), (6) при одном и том же числе

Рейнольдса и если эта краевая задача математически корректно поставлена, то обтекаемые этими течениями тела должны иметь один и тот же коэффициент лобового сопротивления $C_D(\mathrm{Re})$.

Классическое экспериментальное подтверждение данного следствия (но не обязательно тех гипотез, которые при этом были использованы!) показано на рис. 7а и 7б, где приведены коэффициенты лобового сопротивления соответственно для цилиндра и сферы. Едва ли можно было предположить существование этих замечательных кривых, если бы свойства вязкости не были указаны в точной математической формулировке!

Представления, лежащие в основе теоремы 2, будут подробно проанализированы в § 71.

§ 22. Парадокс неаналитичности

Лагранж построил первое доказательство того, что в невязкой жидкости завихренность частицы жидкости является перманентной. К сожалению, доказательство Лагранжа, как показал Стокс ([13], т. 1, стр. 106—112), ошибочно. Оно одинаково применимо и к областям в вязкой жидкости, где эта завихренность *неперманентна!* Ошибка заключалась в том, что скорость и завихренность предполагались *аналитическими* функциями времени.

Если это принять (согласно гипотезе (E) из § 1), то можно рассуждать следующим образом. Основное уравнение (3) эквивалентно (если применить операцию rot к обеим его частям) уравнению

$$\frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} = \nu\nabla^2\boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} \tag{9}$$

относительно завихренности $\boldsymbol{\xi} = \nabla\times\mathbf{u}$. С помощью независимых переменных Лагранжа $\mathbf{a}$ и t, где $\mathbf{a}$ относится к движущейся частице, так что $\partial/\partial t$ ($\mathbf{a}$ фиксировано) есть D/Dt, мы можем преобразовать частные производные по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum A_{kj}(\mathbf{a},\, t)\frac{\partial}{\partial a_j}.$$

Применяя эту операцию к уравнению (9), получаем соотношение

$$\frac{D\xi_i}{Dt} + \sum \xi_k(\mathbf{a},\, t)\, A_{kj}(\mathbf{a},\, t)\frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \nu\nabla^2\xi_i + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\,u_i. \tag{10}$$

Последовательно дифференцируя соотношение (10) по времени t при постоянном $\mathbf{a}$, получим последовательность явных выражений для $D^n\xi_i/Dt^n$. Легко показать, что каждый член в

каждом таком выражении содержит в качестве множителя либо ξ_i, либо $\nabla^2\xi_i$, либо одну из производных

$$D\xi_i/Dt, \ldots, D^{n-1}\xi_i/Dt^{n-1} \text{ и т. д.}$$

Поэтому, предполагая все функции дифференцируемыми бесконечное число раз, индукцией по n получаем, что *все* $D^n\xi_i/Dt^n = 0$ [1]).

Наличие вязкости проявляется в членах с пространственными производными от завихренности. Для невязкой жидкости начальная завихренность $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}, 0) = 0$ в любой точке $\mathbf{x}(\mathbf{a}, 0)$ обеспечивает то, что все $D^n\boldsymbol{\xi}/Dt^n(\mathbf{a}, 0) = 0$ в тех же точках, в то время как в вязкой жидкости для обращения в нуль пространственных производных от завихренности требуется отсутствие завихренности в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}(\mathbf{a}, 0)$.

И в том и в другом случае, если функция $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}, t)$ *аналитическая* по t, то она тождественно обращается в нуль, так как все члены ее разложения в ряд Тейлора (по t) тождественно равны нулю. Это приводит к следующему парадоксу [2]).

Парадокс неаналитичности. *Для того чтобы область жидкости, находящаяся вначале в состоянии покоя (или в безвихревом движении), стала завихренной, она должна уже иметь завихренность, которая является неаналитической функцией времени.*

§ 23. Существование и единственность

Прежде чем выяснить пригодность уравнений Навье — Стокса для описания механики реальных (несжимаемых) жидкостей, нам следовало бы убедиться в том, что с их помощью можно формулировать физически естественные краевые задачи, которые математически оказываются корректно поставленными (см. теорему 2, следствие). То есть мы должны иметь теоремы существования и единственности, которые до сих пор доказывались только при весьма ограниченных допущениях.

Что касается задачи Коши (задачи с начальными условиями), то для нее существование и единственность были доказаны для случаев плоских и осесимметричных течений в предположении конечности полной энергии. При доказательстве исполь-

[1]) Если первоначально $\xi = 0$. — *Прим. перев.*

[2]) Duhem P., Traité d'Énergétique, т. 2, стр. 121; Truesdell C., Kinematics of vorticity, Indiana Univ. Press, 1954, § 104.

зуется уравнение (9), которое для плоского течения имеет упрощенный вид:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu\nabla^2\zeta, \qquad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{11}$$

Однако в пространственном случае даже для конечной полной энергии было доказано только существование — и то лишь для ограниченных интервалов времени [1]). Хотя предположение о конечности полной энергии, вероятно, может быть ослаблено, — пожалуй, достаточным может оказаться ограниченность скорости, — Е. Хопф [2]) показал, что задача Коши для уравнений Навье — Стокса не является корректно поставленной, если допустить, что с увеличением расстояния от начала координат скорость возрастает линейно, а давление — квадратично.

В стационарном случае теоремы существования доказаны для обтекания препятствий произвольной формы как в плоскости, так и в пространстве, но *не* доказаны теоремы единственности. Если рассматриваемые стационарные течения являются единственными, то при больших числах Рейнольдса они физически *неустойчивы*; это явно следует из парадокса турбулентности (§ 25) [3]).

§ 24. Течение Пуазейля

Уравнения Навье — Стокса, как и уравнения Эйлера во времена Лагранжа, удалось пока проинтегрировать лишь в нескольких случаях. Поэтому согласование с экспериментом в этих немногих случаях имеет принципиальное значение.

Одним из таких случаев является течение жидкости в длинной прямой трубе, поперечное сечение которой есть круг постоянного радиуса c. Пусть x обозначает расстояние, измеряемое вдоль трубы, а r — расстояние от оси трубы. В этих цилиндрических координатах u_x, u_r и u_θ пусть обозначают соответственно осевую, радиальную и трансверсальную составляющие скорости.

Теорема 3. *Единственно возможными решениями системы* (3), (4), (6), *обладающими предполагаемой симметрией (ста-*

[1]) Leray J., *J. de Math.*, **12** (1933), 1—82; там же **13** (1934), 331—418; *Acta Math.*, **63** (1934), 193—248; Hopf E., *Math. Nachr.*, **4** (1951), 213—231. См. также Долидзе Д. Е., *ПММ*, **12** (1948), 165—180 и **19** (1955), 764.

[2]) Hopf E., *J. Rat. Mech. Anal.*, **1** (1952), 107.

[3]) Значительные результаты относительно существования и устойчивости решений стационарных и нестационарных краевых задач для уравнений Навье — Стокса получены в ряде работ О. А. Ладыженской и ее сотрудников. См. Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, Физматгиз, М., 1961. — *Прим. перев.*

ционарные течения вязкой жидкости в круглой трубе), являются течения Пуазейля, определяемые формулами

$$u_x = a(c^2 - r^2), \qquad u_r = u_\theta = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Предположение о стационарности течения означает, что функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, r, \theta)$ не зависит от времени t. Кроме того, условия задачи инвариантны относительно отражения в любой плоскости, проходящей через ось трубы; течение имеет эту симметрию тогда и только тогда, когда $u_\theta = 0$, $u_x = f(x, r)$, $u_r = g(x, r)$. Согласно нашим условиям, должна быть также инвариантность относительно произвольного переноса вдоль оси трубы. А так как ν предполагается не зависящим от давления, то это же относится и к уравнениям (3) и (4). Симметрия относительно переноса эквивалентна соотношениям $u_x = f(r)$, $u_r = g(r)$. Из этих соотношений и из условия (6) следует, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = d[rg(r)]/dr = 0$, откуда $g(r) = C/r = 0$, так как на оси $g(r) = 0$.

Теперь, полагая $\mathbf{g} = 0$, согласно теореме 1, мы используем уравнение (3). Поскольку $u_2 = u_3 = 0$, имеем $p = p(x)$. Рассматривая случай $i = 1$ (с одной координатой x), получаем соотношение

$$p'(x) = \mu \nabla^2 u_x = \mu [f''(r) + r^{-1} f(r)].$$

Так как левая часть не зависит от r, то правая часть также не должна зависеть от r. Таким образом, $(rf')' = rf'' + f' = kr$ для некоторого постоянного k, и $rf' = \frac{1}{2} kr^2 + K$. Это дает конечное значение $u_x = f(r)$ при $r = 0$, только если $K = 0$; следовательно, $f' = kr/2$ и $f(r) = \frac{1}{4} kr^2 + b$. Для того чтобы удовлетворялось условие прилипания (6) на границе, должно быть $u_x = a(c^2 - r^2)$, что завершает доказательство теоремы.

Подставляя полученные выражения в уравнение (3), мы получаем классический результат, что градиент давления равен

$$-\frac{dp}{dx} = 4\mu a = \frac{8\mu Q}{\pi c^4}, \tag{13}$$

где $Q = \pi a c^4/2$ есть объем жидкости, протекающий за единицу времени через поперечное сечение трубы.

§ 25. Парадокс турбулентности

Экспериментальные данные в этом случае в высшей степени замечательны. Хотя формула (13) (закон Пуазейля — Хагена) подтверждается при движении жидкости в капиллярных труб-

ках, она полностью теряет силу для обычных гидравлических труб. Точнее, мы можем сформулировать следующий общий парадокс.

Парадокс турбулентности. *Для течений в прямых трубах гипотеза симметрии* (С) *из* § 1 *выполняется, если число Рейнольдса* $\mathrm{Re} < 1700$, *и обычно не выполняется при* $\mathrm{Re} > 10^4$. *Когда* $\mathrm{Re} > 10^4$, *наблюдаемое на опыте течение не обладает ни пространственной, ни временно́й симметрией и является турбулентным.*

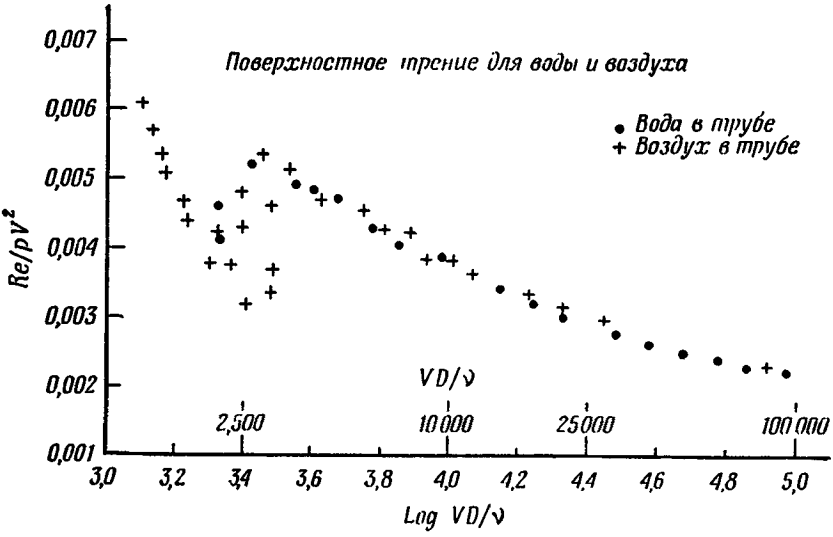


Рис. 8. Подобие течений воздуха и воды в трубах по числу Re.

Оговорка «обычно» в предыдущем утверждении относится к тому, что можно избежать появления турбулентности, добиваясь полной обтекаемости входного отверстия, полируя стенки и обеспечивая на входе трубы ламинарное течение. При чрезвычайной тщательности можно было таким путем избежать появления турбулентности при значениях Re вплоть до 40 000. Но если не принимать специальных мер, то течение в трубках при $\mathrm{Re} > 2000$ будет турбулентным.

Это хорошо иллюстрируют классические экспериментальные данные Стантона и Пэнеля [1]), которые воспроизведены на рис. 8.

[1]) Stanton, Pannell, *Phil. Trans.*, **A214** (1914), 119—124; более подробное исследование турбулентного течения в трубах см. в [3], гл. VIII.

Они своеобразно подтверждают уравнения Навье — Стокса, показывая, что *критическое число Рейнольдса* $\mathrm{Re}_{\text{кр.}}$, при котором имеет место переход к турбулентности, одно и то же для воздуха и воды и равно приблизительно 1700. Теоретически этот вывод можно было бы получить из теоремы 2. Большинство современных специалистов считают, что течение Пуазейля является просто *неустойчивым* при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр.}}$, а турбулентное течение все-таки удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса. Хотя из принципа подобия (7) теоремы 2 не следует справедливость уравнений Навье — Стокса, их пригодность в случае турбулентного течения подтверждается опытными измерениями скорости затухания однородной турбулентности [1]).

Кроме того, гипотеза (C) из § 1 все-таки выполняется *статистически*. Обозначая черточками средние значения, мы можем выразить симметрию посредством следующих формул:

$$\bar{u}_x = F(r), \quad \bar{u}_r = \bar{u}_\eta = 0, \quad \bar{u}_x^2 = G(r), \quad \bar{u}_r^2 = H(r)$$

и т. д. Таким образом, рассмотрение экспериментальных данных подсказывает нам концепцию *статистически* определенных решений уравнений в частных производных как новую и увлекательную область для математических исследований. Изучение таких «стохастических дифференциальных уравнений» открывает теперь новые горизонты в математическом анализе.

Несмотря на доблестные усилия математиков [2]), наблюдаемая неустойчивость течения Пуазейля не получается в результате исследований средствами математического анализа. Предполагали [3]) даже, что в идеально гладких круглых трубах течение Пуазейля является *устойчивым* относительно бесконечно малых возмущений. Однако в настоящее время даже для случая двумерных возмущений совершенно достоверно установлена неустойчивость плоского течения Пуазейля между двумя параллельными пластинками при $\mathrm{Re} > 5300$. Поэтому подобное предположение представляется маловероятным.

---

[1]) Stewart R. W., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **47** (1951), 146—157. (Относительно изотропной турбулентности см. [14*], [9*] и приведенную там литературу. — *Прим. ред.*)

[2]) См. Synge J. L., Hydrodynamical stability, Semicentennial publ. Am. Math. Soc., 1938, т. 2, стр. 227—269; [36], особенно § 3.2.

[3]) См. [11], т. 2, стр. 32—33; Comolet R., *Comptes Rendus*, **226** (1948), 2049 (также *La Houille Blanche, numéro special* **B** (1949), 673). Теоретические аргументы см. Pekeris C. L., *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, **34** (1948), 285—295.

§ 26. Другие парадоксы симметрии

Весьма любопытно, что склонность к симметрии проявляется лишь в ограниченной области $\mathrm{Re} < 1700$. Любопытно, что и предполагаемое стремление к наименьшему действию, по-видимому, имеет примерно те же границы, поскольку расход энергии в течении Пуазейля меньше, чем в турбулентном течении [1]).

Для того чтобы хоть немного разобраться в этих фактах, рассмотрим другие примеры из гидродинамики, в которых необоснованное применение гипотезы (С) из § 1 также приводит к неправильным результатам.

Один из интересных примеров представляет собой течение в трубах с некруговым поперечным сечением. При малых Re в этом случае опять-таки наблюдается параллельное течение, для которого можно вычислить профиль скоростей ([7], § 332) и в котором принцип наименьшего действия остается в силе. При больших Re течение снова становится турбулентным и даже статистически не является параллельным: существуют значительные «вторичные течения» [2]) в углах трубы.

Другой случай был изучен Дж. Тейлором в его классической работе [3]). Рассмотрим вязкую жидкость, находящуюся между двумя длинными соосными цилиндрами, которые вращаются в противоположных направлениях с постоянными угловыми скоростями ω и ω' соответственно. Описанное течение является (приближенно) симметричным относительно переносов вдоль и вращения вокруг оси цилиндров, а также не зависит от времени. Имеется в точности одно решение системы (3), (4), (6), обладающее такой симметрией; оно носит название «течения Куэтта».

При малых ω, ω' такое течение Куэтта наблюдается экспериментально. При больших числах Рейнольдса вместо течения Куэтта появляется несимметричное, однако нетурбулентное течение. Грубо говоря, сохраняется симметрия во времени, но не в пространстве.

Далее, рассмотрим маленький пузырек воздуха, поднимающийся в стоячей воде под действием собственной плавучести. Благодаря поверхностному натяжению он принимает форму, близкую к сферической, и, во всяком случае, на него не действует ни одна сила, которая не была бы симметричной относительно вертикальной оси, проходящей через центр пузырька. Следовательно, в силу симметрии, пузырек должен был бы

[1]) По поводу специальных теорем относительно минимума расхода энергии см. [7], § 344.

[2]) [3], п. 161, где приводятся результаты Никурадзе.

[3]) *Phil. Trans.*, **A223** (1922), 289—293; см. также [36], гл. 2.

подниматься вертикально. Однако, и это поразительный факт, при $\mathrm{Re} > 50$ такой пузырек прокладывает себе путь вверх по вертикальной спирали! [1])

Аналогичное явление имеет место в следе за круговым цилиндром, который движется в потоке параллельно своей образующей. В диапазоне чисел Рейнольдса $50 < \mathrm{Re} < 500$ эта зона содержит чередующиеся вихри противоположных знаков (вихревая дорожка Бенара — Кармана); это явление будет проанализировано в § 56.

На первый взгляд может показаться, что подобные примеры противоречат метафизическому принципу Лейбница достаточного основания [2]), а именно нашей гипотезе (С). Более глубокий подход состоит в том, что, *хотя симметричные причины обусловливают симметричные явления, почти симметричные причины не обязательно приводят к почти симметричным явлениям:* симметричная задача может не иметь ни одного *устойчивого* симметричного решения. Такая возможность и является действительным источником «парадоксов симметрии» (наблюдаемых нарушений гипотезы (С) из § 1).

Далее отметим, что проанализировать *устойчивость* решения гораздо труднее, чем получить само решение, поэтому почти наверняка решения будут получаться задолго до того, как будет установлена их неустойчивость. В силу этого можно предвидеть, что и в будущем поток парадоксов симметрии не прекратится.

§ 27. Теория пограничного слоя

Фундаментальный вопрос механики жидкостей состоит в том, чтобы найти взаимосвязь между решениями уравнений Эйлера для движения невязкой жидкости и решениями уравнений Навье — Стокса для жидкостей с исчезающе малой вязкостью. Математически речь идет об асимптотическом поведении решений системы (3), (4) при $\mu \to 0$ (т. е. при $\mathrm{Re} \to +\infty$). Поскольку обычно для кораблей и самолетов числа Рейнольдса лежат в интервале $10^6 — 10^9$, то для того же интервала огромное практическое значение имеет задача расчета лобового сопротивления.

---

[1]) См. Nisi H. and Porter A. W., *Phil. Mag.*, **46** (1923), 754; [17], стр. 294; Saltman P. J., *J. Fluid Mech.*, **1** (1956), 249—275.

[2]) Современную формулировку этого принципа дал Birkhoff G. D., *Rice Institute Pamphlet*, **28** (1941), № 1, 24—50; Collected Papers, т. 3, стр. 778—804. Любопытно, что формальные системы математической логики игнорируют этот принцип, применимость которого к физике была замечена в 1894 г. Пьером Кюри («Oeuvres Scientifiques», Paris, 1908, особенно стр. 119—215).

Легко видеть, что обычная теория возмущений к этой задаче не применима, так как член, учитывающий вязкость $\nu\nabla^2\mathbf{u}$, в уравнении (3) имеет самый большой порядок и, следовательно, возмущение вязкости ν относительно значения $\nu = 0$ есть *сингулярное возмущение* [1]). Тип уравнений в частных производных обычно определяется членами наивысшего порядка. Таким образом, пренебрежение членами высшего порядка ведет к стиранию различий между типами уравнений. Даже для обыкновенных дифференциальных уравнений такого вида, как $\varepsilon y'' + y = 0$, с краевыми условиями $y(0) = a$, $y(1) = b$, мы получаем в пределе совершенно различные картины в зависимости от того, положить ли $\varepsilon \to +0$ или $\varepsilon \to -0$.

Современные исследования указанного выше сингулярного возмущения в большинстве исходят из идеи Прандтля о том, что завихренность имеет место лишь в тонком *пограничном слое* жидкости у любой твердой границы, в котором происходит резкий перепад касательных напряжений, и в следе (часто близкого к вихревому слою) позади тела. Вне этого пограничного слоя и следа течение является почти безвихревым, и к нему применимы уравнения Эйлера.

Для собственно пограничного слоя Прандтль [2]) построил модель, согласно которой некоторые члены в уравнениях отбрасываются. Для двумерного потока он получил (пренебрегая силой тяжести) уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}p'(x) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad p = p(x), \qquad (14)$$

плюс обычное условие несжимаемости (4) $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$. Уравнение (14) — уравнение *параболического типа*, и его можно интегрировать численно, пока $u > 0$, с учетом краевых условий $u(x, 0) = v(x, 0) = 0$ на неподвижной стенке и $u(x, \infty) = u_\infty(x)$ вне пограничного слоя, причем предполагается, что $u_\infty(x)$ выражено через давление по уравнению Бернулли: $\rho u_\infty^2/2 + p(x) = \text{const}$. Предполагается также, что в первой же точке, в которой $u(x, y) < 0$ при положительном y, происходит *отрыв* потока [3]).

Были предприняты различные попытки сделать более строгим несколько интуитивный вывод Прандтлем уравнения (14); вероятно, более всего заслуживает внимания то, что сделано

---

[1]) Это подчеркивали Oseen ([9], стр. 211) и др.

[2]) Proc. Third Int. Math. Congress Heidelberg (1904), стр. 484—491, перепечатано в [37].

[3]) Более подробно см. в [3], гл. IV; или в [43], стр. 94—99 и 222—224.

Мизесом [1]). Однако многие результаты теории еще далеко не ясны. Кроме неразъясненной сингулярности у передней кромки, к ним относится также следующий парадокс.

Парадокс пограничного слоя. *Теоретически при выводе уравнения* (14) *предполагается, что отношение* δ/x *толщины пограничного слоя* δ *к длине* x *стремится к нулю. Экспериментально же показано, что если* $\delta/x < 0{,}01$, *то пограничный слой становится турбулентным и уравнение* (14) *не удовлетворяется* [2]).

Например, пограничный слой остается ламинарным вдоль корпуса корабля и вдоль крыльев самолета во время полета всего на расстоянии нескольких сантиметров! Эту турбулентность пограничного слоя можно связать, как мы сейчас увидим, с турбулентностью в трубах.

§ 28. Парадоксы Эйфеля и Дюбуа

Представление о том, что сопротивление снаряда D должно быть плавно возрастающей функцией скорости снаряда v, весьма старо. Так, во многих учебниках можно найти «доказательства» (с помощью анализа размерностей, см. § 61) того, что сопротивление D должно быть пропорционально v при малых скоростях и пропорционально v^2 при больших скоростях. Поэтому в высшей степени удивительным показался открытый в 1912 г. Констанци и Эйфелем [3]) следующий парадокс.

Парадокс Эйфеля. *При числах Рейнольдса, близких к критическому числу* $\mathrm{Re}_{\text{кр.}} \simeq 150\,000$, *сопротивление сферы фактически убывает с возрастанием скорости.*

Два года спустя Прандтль показал, что это падение сопротивления зависит от возникновения *турбулентности* в «пограничном слое» около сферы и эта турбулентность может быть вызвана путем увеличения шероховатости сферы *или* же при помощи дополнительной турбулизации потока. Действительно,

---

[1]) *ZAMM*, 7 (1927), 425—427. Эвристическое исследование сингулярности для течения вблизи передней кромки плоской пластинки см. Carrier G. F., Lin C. C., *Quar. Appl. Math.*, **6** (1948), 63—68.

[2]) Ср. [43], стр. 32—33. Другие трудности, возникающие при наивном применении теории, упомянуты там на стр. 110—112. По поводу дальнейших затруднений см. также Stewartson K., *J. Math. Phys.*, MIT. **36** (1957), 173—191.

[3]) Eiffel G., *Comptes Rendus*, **155** (1921), 1597—1599. Объяснение Прандтля см. в [11], т. 2, п. 63, или Gott. Nachr., Math.-Phys. Kl. (1914), 177—190.

можно связать число $\mathrm{Re}_{\text{кр.}} \simeq 150\,000$ парадокса Эйфеля с $\mathrm{Re}_{\text{кр.}} \simeq 1700$ для турбулентности в трубах посредством сопоставления толщины ламинарного пограничного слоя δ диаметру трубы d. Если $\mathrm{Re} = u_\infty x/\nu$ есть число Рейнольдса основного течения на расстоянии x от передней кромки, то из уравнения (14) следует $\delta(x) \simeq 4\sqrt{\nu x/u_\infty}$, и тогда число Рейнольдса для пограничного слоя определяется выражением $\mathrm{Re}_\delta = u_\infty \delta/\nu \simeq 4\sqrt{u_\infty x/\nu}$. Отсюда $\delta/x \simeq 4/\sqrt{\mathrm{Re}}$, а число Рейнольдса из парадокса Эйфеля $\mathrm{Re}_{\text{кр.}} \simeq 150\,000$ приближенно соответствует числу $\mathrm{Re}_\delta \simeq 4\sqrt{\mathrm{Re}_{\text{кр.}}} \simeq 1600$, что вполне согласуется с $\mathrm{Re}_{\text{кр.}}$ для турбулентности в трубах. Это открытие объясняет также следующий более старый парадокс.

Парадокс Дюбуа. *Сопротивление палки, которую удерживают неподвижно в потоке, имеющем скорость v, обычно меньше, чем сопротивление той же палки, которую тянут с той же скоростью v в стоячей воде.*

Этот парадокс особенно интересен потому, что на первый взгляд кажется, будто он противоречит основному принципу механики Ньютона — инвариантности всех законов при переходе к равномерно и поступательно движущимся осям координат. Вероятно, потому что Леонардо да Винчи [1]) признавал этот принцип, он утверждал равносильность двух указанных выше случаев — хотя это сразу опровергается наблюдением.

В настоящее время объяснение парадокса Дюбуа считается известным. Потоки жидкости всегда более или менее турбулентны; это приводит к понижению сопротивления по той же (не объясненной математически) причине, по которой понижается сопротивление при обтекании сферы, как было показано Прандтлем. Выражаясь современным языком, свободная турбулентность потока вызывает переход к турбулентному движению в пограничном слое. Это в свою очередь задерживает отрыв потока, сужая таким образом «след» и уменьшая связанное с этим лобовое сопротивление.

§ 29. Регулирование пограничного слоя

Первоначально (см. прим. 1) на стр. 61) Прандтль считал свою теорию пограничного слоя мостом, связывающим классическую теоретическую гидродинамику и динамику реальных

[1]) MacCurdy E., The Notebooks of Leonardo da Vinci, New York, 1941, стр. 503. Леонардо также заметил подобие воздуха и воды (там же, стр. 645).

жидкостей. Согласно теории, при неограниченном возрастании числа Рейнольдса Re пограничный слой должен стремиться стать бесконечно тонким. Отсюда следует, что при достаточной изобретательности мы в состоянии *регулировать* этот пограничный слой произвольно малым усилием так, чтобы аппроксимировать течения Жуковского с *нулевым сопротивлением и большой подъемной силой*. Для достижения этой цели было проведено огромное число тщательных исследований и экспериментов; некоторые из них мы сейчас вкратце рассмотрим [1]).

Наиболее известным является то соображение, что сопротивление можно уменьшить при помощи улучшения *обтекаемости*. Под этим мы понимаем подбор для крыла самолета такого очертания, которое сводит к минимуму градиент противодавления. Это должно было бы задержать отрыв потока и таким образом уменьшить лобовое сопротивление, позволяя избежать застойной области у передней кромки либо отрыва вблизи нее. На практике это достигается тем, что передняя кромка округляется, а остальная часть тела постепенно суживается до острой задней кромки.

Опасность появления застойной области, которая уменьшает подъемную силу, равно как увеличивает лобовое сопротивление, прежде всего возникает при больших углах атаки. Для того чтобы задержать появление застойной области, весьма полезно также слегка искривить профиль крыла книзу. В предельном случае профиля в виде дуги окружности легко убедиться в том, что этот прием позволяет избежать бесконечного значения скорости на передней кромке; в общем случае течений Жуковского это приводит к значительному уменьшению градиента противодавления на верхней (подсосной) стороне.

Главной задачей национальных лабораторий в течение 1910—1930 гг. было создание оптимально обтекаемых очертаний для самолетов, летавших со скоростями не более 400 *км/час* (когда можно было пренебречь эффектами сжимаемости).

Для анализа экспериментальных данных и проектирования новых опытных конструкций большим подспорьем был расчет распределения давления согласно теории Жуковского, а следовательно, по уравнениям Эйлера. Однако ценность таких расчетов *не* в определении значений подъемной силы, лобового сопротивления или момента (ср. § 8), а в том, что они позволили указать на переход к турбулентности и на отрыв потока в по-

[1]) См. [3], гл. 12 и [43], гл. 13, где содержится более полное введение в рассматриваемый вопрос. Относительно идей Прандтля см. [11], т. 2, п. 50—52 и 91—93.

граничном слое. Как это далеко от первоначальной концепции Лагранжа!

При больших углах атаки можно избежать потери скорости и получить большую подъемную силу при помощи так называемых *разрезных крыльев*. Такие крылья знакомы пассажирам самолетов и могут быть получены при помощи предкрылка и закрылка. К сожалению, разрезные крылья увеличивают лобовое сопротивление, поэтому их используют лишь на взлете и при посадке, когда в первую очередь важно получить большую подъемную силу при уменьшенной скорости. Хотя трудно предсказать математически, как работают разрезные крылья, характер влияния щелей на течения вдоль верхней стороны крыльев, очевидно, подобен действию струй, которые снижают тенденцию к отрыву потока посредством ускорения пограничного слоя. Изобретательные техники пробовали также использовать струи для тех же целей.

Другое многообещающее приспособление основано на создании принудительного *подсоса* либо через щели, либо через равномерно размещенные круглые отверстия на тех участках, где иначе произошел бы отрыв пограничного слоя. В этом случае пограничный слой отжимается к стенке, и мы опять получаем лучшее приближение к течению Жуковского. Если используются щели, то, исходя из теории Жуковского, нужно создать повышенное давление как раз впереди щелей [1]). Можно также попытаться использовать подсос для того, чтобы сохранить пограничный слой *ламинарным*, тем самым опять-таки уменьшая лобовое сопротивление. К сожалению, очень трудно, по-видимому, получить такое ламинарное течение. Даже летящие в воздухе насекомые могут вызвать турбулентность при обтекании самой гладкой поверхности крыла.

Последняя идея Прандтля заключалась в том, чтобы помешать уменьшению скорости в пограничном слое, а следовательно, и отрыву, используя *движущиеся границы*. Хотя в лабораторных условиях и можно продемонстрировать правильность рассматриваемой идеи [2]), но до сих пор ее применение имеет лишь эмпирическую основу, так что в дальнейшем мы больше не будем возвращаться к этому вопросу.

---

[1]) См. Goldstein S., *J. Aer. Sci.*, 15 (1948), 189—220; Pfenninger W., там же, 16 (1949); 227—236; Doehnhoff A. E., Lofton L. K., Jr., там же, 729—740; Lachmann G. V., *J. Roy. Aer. Soc.*, 59 (1955), 163—198.

[2]) См. [11], п. 51—52; Ackeret J., Das Rotorschiff..., Goettingen, 1925; Favre A., *Comptes Rendus*, 202 (1936), 434—436. По поводу идей Прандтля см. также § 9.

Технические трудности, встречающиеся при реализации упомянутых выше соображений, не должны заслонять лежащую в их основе идею — аппроксимацию идеального течения Жуковского, описанного в § 8.

§ 30. Парадокс Стокса

В § 25—29 мы рассмотрели трудности, связанные с теоретическими расчетами течений при больших числах Re. Теперь мы перейдем к противоположному случаю, когда $\mathrm{Re} \to 0$. В этом случае разложение по степеням Re уже не связано с «сингулярным возмущением» в смысле § 24; нелинейный конвективный член $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ не будет членом самого высокого порядка, и с математической точки зрения представляется вполне целесообразным его попросту опустить.

Это было сделано Стоксом, который ввел, таким образом, новый класс идеальных течений, обычно называемых «ползущими». В таком приближении Стокс вывел формулу

$$D = 6\pi\mu c v \tag{15}$$

для сопротивления, испытываемого твердой сферой радиуса c при медленном движении со скоростью v в жидкости с вязкостью μ. При выводе существенно используется гипотеза (C) применительно к осевой симметрии. Окончательная формула (15) хорошо подтверждается экспериментально [1]) при $\mathrm{Re} < 0{,}2$.

Казалось бы, вполне естественно применить тот же самый метод к круговым цилиндрам, движущимся перпендикулярно оси. Однако в этом случае мы имеем следующий парадокс.

Парадокс Стокса. *Стационарное «ползущее» обтекание кругового цилиндра невозможно.*

Доказательство. При плоском стационарном ползущем течении уравнения Навье — Стокса (11) сводятся к уравнению $\nabla^2 \zeta = 0$. Если V — функция тока, то последнее уравнение эквивалентно уравнению $\nabla^4 V = 0$, т. е. V — *бигармоническая* функция. Отсюда следует, что V — *аналитическая функция* [2]). Действительно, во всяком круговом кольце функцию V можно разложить в ряд Фурье

$$V = \sum a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta, \tag{16}$$

[1]) [3], п. 215. По поводу формулы (15) см. [7], п. 337—338.

[2]) Относительно свойств используемых бигармонических функций см. Nicolescu M., Les fonctions polyharmoniques, Hermann, 1936, особенно стр. 13—16 и стр. 32. Обычно вместо строгого доказательства ссылаются на гипотезу (E).

где $a_n(r)$ и $b_n(r)$ удовлетворяют соотношениям

$$E_n^1 a_n = E_n^1 b_n = 0, \qquad E_n^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{r^{-1}d}{dr} - n^2 r^2. \tag{16'}$$

Если вектор скорости $(\partial V/\partial y, -\partial V/\partial x)$ в прямоугольных координатах ограничен на бесконечности, то простое вычисление дает соотношение $a_1(r) = A_1 r + a_1/r$, и $a_n(r) = a_n'/r^{n-2} + a_n''/r^n$ при $n \geqslant 2$. Отсюда следует формула

$$V = vy + V_0 + a_0 \ln r + \frac{a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta}{r} + \\ + \sum_2^\infty \left\{ \left(\frac{a_n'}{r^{n-2}} + \frac{a_n''}{r^n} \right) \cos n\theta + \left(\frac{b_n'}{r^{n-2}} + \frac{b_n''}{r^n} \right) \sin n\theta \right\}. \tag{17}$$

С другой стороны, если $\nabla^4 V = 0$, то из теоремы о дивергенции следует уравнение

$$\int\int_A (\nabla^2 V)^2 \, dx\, dy = \int_C \left\{ \nabla^2 V \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 V) \right\} ds,$$

где C — кривая, ограничивающая область A.

Пусть теперь A — область между цилиндром и большой окружностью радиуса r. Так как на цилиндре $V = \partial V/\partial n = 0$, интеграл в правой части предыдущего уравнения, взятый по этой части C, должен обращаться в нуль. На большой окружности, поскольку

$$\nabla^2 V = O(r^{-2}), \quad V = O(r), \quad \nabla V = O(1) \text{ и } \nabla(\nabla^2 V) = O(r^{-3}),$$

справедливо соотношение

$$\int_C \left\{ \nabla^2 V \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 V) \right\} ds = O(r^{-2}) \cdot O(r) \to 0$$

при $r \to \infty$. Так как $(\nabla^2 V)^2 \geqslant 0$, то отсюда следует, что $\nabla^2 V \equiv 0$, т. е. V должно быть гармонической функцией. Следовательно, в формуле (17) $a_n' = b_n' = 0$. Наконец, из условия $\partial V/\partial r = 0$ — условия прилипания на поверхности цилиндра — следует, что $V = V_0$ и $v = 0$, а это завершает доказательство [1]).

[1]) Подробное изложение вопросов § 30 и § 31 см. в [1*]. — *Прим. ред.*

§ 31. Уравнения Озеена

Озеен[1]) и Ламб ввели парадокс Стокса в рамки теории, показав, что конвективные члены преобладают над вязким членом при очень больших значениях r, как бы ни было мало число Re. Переопределенности можно избежать, более аккуратно переходя к двойному пределу при $\mathrm{Re} \to 0$, $r \to +\infty$.

Чтобы получить разрешимую краевую задачу, Озеен предложил ввести в оператор D/Dt вместо точных членов $\sum u_k \partial/\partial x_k$ линеаризованные конвективные члены $\sum u_k(\infty)\partial/\partial x_k$. Благодаря введению таких слагаемых в уравнения Стокса Озеен смог получить теоретическую формулу для лобового сопротивления в случае медленно движущегося цилиндра. Приближенное экспериментальное подтверждение этой формулы возможно, хотя и оказывается довольно трудным ([3], гл. IX).

Это разрешение парадокса Стокса в свою очередь привело к другому парадоксу, открытому Файлоном[2]). В парадоксе Файлона утверждается, что уравнения Озеена, взятые буквально, дают *бесконечный момент* для эллиптического цилиндра, косо поставленного относительно потока. Этот парадокс был недавно разрешен Имаи при помощи перехода к более высоким приближениям.

Приближенные уравнения Озеена можно также использовать для исправления формулы (15), чтобы учесть влияние малого, но конечного числа Re на лобовое сопротивление сферы; поправочный множитель оказался равным $(1 + 3\mathrm{Re}/8)$. Этот поправочный множитель был тщательно исследован Гольдштейном[3]), который получил степенной ряд для коэффициента сопротивления $C_D(\mathrm{Re})$, сходящийся, вероятно, при $\mathrm{Re} < 2$. Экспериментальные измерения, по-видимому, дают меньшее сопротивление; кроме того, ввиду асимптотического характера исследований Озеена возникает вопрос, не будет ли окончательная формула верна только асимптотически[4]).

Обзор решений других краевых задач, к которым приводят уравнения Озеена, дан в работе [9], часть III. Однако аппроксимация конвективных членов весьма неточна вблизи препят-

---

[1]) [9], стр. 162; [7], стр. 769; см. также [12], т. VI, стр. 29—40.

[2]) Filon L., *Proc. Roy. Soc.*, A113 (1926), 7—27. По поводу объяснения парадокса Файлона, данного Имаи (Imai), см. там же, A208 (1951), 487—516.

[3]) Goldstein S., *Proc. Roy. Soc.*, A123 (1929), 225—235; или [3], § 215. Ср. Weyssenhoff J., *Annalen der Physik*, 62 (1920), 1—45.

[4]) См. Kaplun S., Lagerstrom P. A., *J. Math. Mech.*, 6 (1957), 585—593; Proudman I., Pearson J. R. A., *J. Fluid Mech.*, 2 (1957), 237—262.

ствий и стенок. В связи с этим теория пограничного слоя Прандтля при больших числах Рейнольдса значительно более плодотворна.

§ 32. Парадокс пузырька

В теории подводного взрыва мы встречаемся с положением, аналогичным парадоксу Стокса. Хотя существует простая и чрезвычайно полезная теория сферических пузырьков, возникающих при подводных взрывах [1]), легко показать, что в двумерной гидродинамике для всякого расширения или сжатия пузырька в несжимаемой жидкости требуется бесконечное значение кинетической энергии

$$\frac{1}{2}\int\int(\rho\nabla U\cdot\nabla U)\,dx\,dy.$$

При конечных силах сжимаемость всегда должна играть основную роль на достаточно больших расстояниях.

Имеются еще два любопытных парадокса, происхождение которых скорее физическое, нежели математическое, и которые показывают уязвимость гипотезы (А) из § 1. Пусть маленький воздушный пузырек поднимается в жидкости под действием плавучести, причем он настолько мал, что вследствие поверхностного натяжения сохраняет почти сферическую форму и его движение — «ползущее». Так как пузырек состоит из газа, то вместо условия (6) надо взять его логическое обобщение: $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ должна быть непрерывна при переходе через границу.

Поставленная таким образом математическая задача была решена Рыбчинским и Адамаром при добавочном предположении непрерывности тангенциального напряжения [2]). Теоретически лобовое сопротивление определяется по формуле

$$D=6\pi c v\mu\left(\frac{2\mu+3\mu'}{3\mu+3\mu'}\right)\simeq 4\pi c\mu v,\quad\text{если}\quad \mu'\ll\mu, \tag{18}$$

где μ — вязкость жидкости, а μ' — вязкость жидкости поднимающегося пузырька.

Все это относится к теории. На практике же для сопротивления, по-видимому, обычно верна формула (15), а не (18). Это значит, очевидно, что пузырек ведет себя так, как если бы

[1]) См. [7], п. 91—91а, или [17], гл. XI, § 1—3

[2]) Rybczynski W., *Bull. Acad. Sci. Cracovie* (1911), **40**; Hadamard J., *Comptes Rendus*, **152** (1911), 1735. Относительно экспериментальных данных см. Barr G., A manual of viscometry, Oxford, 1931, стр. 190 и дальше; Bryn T., *Forschung Ing.*, **4** (1933), 27–30; [11], т. 2, п. 74.

он был твердым телом. Такое противоречие между теорией и экспериментом может быть названо парадоксом поднимающегося пузырька.

Как предполагали Бонд[1]) и другие авторы, кажущаяся твердость, возможно, объясняется образованием тонкой (мономолекулярной) пленки на поверхности пузырька из различных примесей, и эта пленка оказывает сопротивление деформации[2]). Однако полная картина все еще не ясна.

Еще более эффектным является следующий парадокс.

Парадокс падающего пузырька. *При вертикальном градиенте температуры в жидкости изменения поверхностного натяжения могут привести к тому, что пузырек будет опускаться, а не подниматься*[3]).

Стягивание поверхности пузырька по направлению к стороне с бóльшим поверхностным натяжением заставляет пузырек в вязкой жидкости двигаться в направлении убывания поверхностного натяжения, т. е. в направлении возрастания температуры. Это явление кажется парадоксальным только потому, что оно так необычно, и потому, что в механике жидкостей почти всегда условно принимают поверхностное натяжение (как и вязкость) постоянным.

§ 33. «Вторая» вязкость

Как указывалось в § 19, при обычном выводе уравнений Навье — Стокса (1*) мы имеем дело с двумя коэффициентами вязкости λ и μ. Можно принять, что коэффициент вязкости μ при сдвиге измеряется для течения Пуазейля; тогда остается задача измерить коэффициент λ и проверить следствия уравнений (1*) для этого коэффициента λ, который, вероятно, зависит от температуры T и давления p.

Как было сказано в § 19, Стокс просто предполагал, что $\lambda = -2\mu/3$. Однако ясно, что надежнее ввести в рассмотрение величину $\mu' = \lambda + 2\mu/3$ и исследовать ее экспериментально. С физической точки зрения λ и «вторая» вязкость μ' не имеют смысла, пока они не определены и не измерены экспериментально.

---

[1]) Bond W. N., *Phil. Mag.*, **4** (1927), 889—898. Отличный обзор вопроса см. McNown J. S., *La Houille Blanche*, **6** (1951), 701—722.

[2]) Сопротивление может быть вязким или упругим; см. Criddle D. W. and Meader A. L., Jr., *J. Appl. Physics*, **26** (1955), 838—842 и приведенную там литературу.

[3]) Block M. J., Young N. O., Goldstein J. S., *J. Fluid Mech.*, **6** (1959), 350—356; см. [17], стр. 319.

А это сделать не легко. Так, в пограничных слоях сжимаемой жидкости значение μ' не играет большой роли, так как величина деформации сдвига намного превышает величину сжатия. Отчасти по этой причине в теории течений с большими скоростями «второй» вязкостью обычно пренебрегают [1]) и наиболее добросовестные авторы оставляют открытым вопрос о соотношении Пуассона — Стокса $\mu' = 0$.

Экспериментальные определения μ' обычно основывались на измерении затухания звука, но теоретическое истолкование таких измерений далеко не просто. Так, Стокс в своей теории затухания звука не только предполагает, что $\mu' = 0$, но все внимание уделяет только величине μ и, кроме того, не учитывает рассеяние, вызываемое теплопроводностью (тепловая диффузия). Последнее было учтено Кирхгофом, который также вычислил (с большим завышением) затухание, обусловленное трением в пограничном слое при распространении звука в трубах [2]), причем учитывалась только величина μ. Но, по-видимому, оба эти автора не рассматривали затухание звука как средство для измерения величины μ'.

Хотя интерпретация экспериментальных данных все еще является до некоторой степени противоречивой, следующие факты, по-видимому, вполне разъяснены. Для некоторых газов, таких, как He, Ar и N_2, опыт согласуется с предположением $\mu' = 0$ [3]). Но другие газы, такие, как O_2 и CO_2, дают гораздо более резкое затухание звука в определенных *полосах частот* [4]).

В воздухе непропорционально большие эффекты могут быть вызваны незначительной относительной влажностью или небольшой примесью CO_2, равно как и пылью, а также шероховатостью стенок (в трубах). Для большинства жидкостей поглощение сильно зависит от частоты; кроме того, необходимо тщательно следить за содержимым пузырька. Так, при относительном объеме пузырька, равном 0,17%, скорость распространения звука

---

[1]) См. [15], стр. 36—38, и [10], гл. 11. По поводу замечаний относительно предположения $\mu' = 0$ см. [7], п. 325, 328; [10], стр. 185, и [11], т. 1, стр. 260, примечание.

[2]) См. [7], п. 359—360; Kirchhoff G., *Pogg. Ann.*, 177 (1868), 177—193. Относительно трения в пограничном слое см. § 115.

[3]) Это можно связать с доказательством Максвелла (при помощи молекулярных соображений, см. § 34) того, что для идеального одноатомного газа $3\lambda + 2\mu = 0$; см. также Rocard Y., Hydrodynamique et théorie cinetique des gaz, Appendix I.

[4]) Duff A. W., *Phys. Rev.*, 6 (1898), 129—139 и 11 (1900), 65—74; van Itterbeck A., Mariens P., *Physica*, 4 (1937), 207—215 и 609—616; Markham J. J., Beyer R. T., Lindsay R. B., *Revs. Mod. Phys.*, 23 (1951), 353—611; Marvin R. S. и др., *J. Appl. Phys.*, 25 (1954), 1213—1218.

уменьшается в 5 раз[1]) и соответственно увеличивается затухание звука.

Легче всего объяснять зависимость затухания звука (ультразвука) от частоты, вводя *время релаксации*[2]) (гистерезисный эффект) при переходе молекулярной энергии от одной собственной частоты к другой. Однако различные авторы пытались согласовать данные наблюдений с соответствующими интерпретациями «второй» вязкости μ'[3]), а следовательно, и величины λ в уравнении (1*)[4]).

§ 34. Молекулярные эффекты

Молекулярное строение жидкостей объясняет многие явления в динамике реальных жидкостей — не только наличие особых полос частот при поглощении ультразвуковых волн, указанное в § 33. Насильственным и неестественным было бы исследование многих таких явлений в рамках ортодоксальной механики континуума.

Например, при оценке толщины фронта ударной волны необходимо учитывать время релаксации в тех жидкостях, в которых подобные молекулярные явления типа гистерезиса оказывают влияние на величину «второй» вязкости (см. прим. 2) на этой стр.). (В классической теории механики континуума толщина фронта ударной волны предполагается равной нулю.)

В верхних слоях атмосферы, где очень мала плотность (давление), время релаксации при $M > 2$ существенно влияет на величину *отхода ударной волны* от движущегося тела[5]).

---

[1]) Wood A. B., A textbook of sound, стр. 362. По поводу удивительных эффектов давления см. Litovitz T. A., Carnevale E. H., *J. Appl. Phys.*, **26** (1955), 816—820.

[2]) Kneser H. O., *Annalen der Physik*, **11** (1931), 761—776; Eckart C., *Revs. Mod. Phys.*, **20** (1948), 232—235; Liebermann L. N., *Phys. Rev.*, **75** (1949), 1415—1422; Lighthill M. J. в работе [20], разд. 4 (относительно толщины ударной волны см. разд. 6); Herzfeld K. F., Litovitz T. A., Absorption and dispersion of ultrasonic waves, 1959.

[3]) Tisza L., *Phys. Rev.*, **61** (1942), 531—536; Гуревич С. Б., *Докл. АН СССР*, **55** (1947), 17—19; Karim S., Rosenhead L., *Revs. Mod. Phys.*, **24** (1952), 108—116; Truesdell C., *J. Rat. Mech. Analysis*, **4** (1953), 643—721.

[4]) По поводу изложенных в этом параграфе соображений см. Слезкин Н. А., Динамика вязкой несжимаемой жидкости, М., ГТТИ, 1955, гл. I и Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, изд. 2-е, М., ГТТИ, 1954, гл. II и § 78 в гл. VIII. — *Прим. перев.*

[5]) См., например, Schwartz R. N., Eckerman J., *J. Appl. Phys.*, **27** (1956), 169—174. Если бы это было результатом мгновенной диссоциации, то величина этого расстояния не зависела бы от плотности (§ 73).

Кроме того, молекулярная диссоциация, рекомбинация молекул и ионизация влияют на толщину ударной волны в гиперзвуковом потоке[1]); действительно, они в значительной мере влияют на движение жидкости в случае, когда при обычных атмосферных условиях число Маха $M > 10$. Так, воздух содержит 1% NO при 2000° К и 10% NO при 3000° К. При температурах свыше 11 000° К становится ощутимой ионизация.

По этой причине при реалистическом подходе к изучению гиперзвуковых ударных волн все в большей мере надо учитывать химическую физику[2]).

Ортодоксальная механика континуума не в силах также объяснить физическое явление *диффузии* и обратное ему — *разделение* составной жидкости или газа на свои компоненты, например отделение сливок от молока. В идеальном континууме отделение изотопов не было бы возможно ни с помощью газовой диффузии, ни в центрифугах, ни в соплах[3]).

Скольжение жидкости. Совсем иначе используются молекулярные представления при объяснении нарушения граничного условия (прилипания жидкости) (6), когда средняя длина свободного пробега молекулы сравнима с макроскопическими размерами. Можно отметить при этом три важных частных случая: течение через щели, свободное падение мельчайших капель (опыт Милликена с каплей масла) и торможение спутника. Во всех этих случаях весьма заметно отклонение от законов механики континуума[4]): наблюдаемые усилия сдвига значительно меньше, чем предсказываемые формулами (13) и (15).

Легче всего истолковать указанные явления как вызванные частичным нарушением условия (6). В предельном случае «зеркального отражения» всех молекул (угол падения равен углу отражения) напряжение сдвига на границе, очевидно, должно равняться нулю. Таким образом, условие (6) логично заменить условием непрерывности нормальной составляющей скорости (гл. 1, (7)), свойственным невязкому течению. Так как

---

[1]) См. Lighthill M. J., *J. Fluid Mech.*, 2 (1957), 1—32, а также [14].

[2]) См. *Nature*, 178 (1956), 343—345; Deal W. E., *J. Appl. Phys.*, 28 (1957), 782. Ценный обзор исследований, проведенных в течение второй мировой войны, сделали Penney W. G., Pike H. H. M., *Progress in Physics*, 13 (1950), 46—82.

[3]) По поводу аэродинамических методов отделения изотопов (с помощью сопла) см. Leroy M., Nucleonics, April, 1960, стр. 68.

[4]) Knudsen M., *Annalen der Physik*, 34 (1911), 593—656. О недавних обзорах с библиографиями см. Patterson G. N., Molecular flow of gases, Wiley, 1956, гл.V; а также Schaaf S., гл. 9—10 в Heat transfer, Univ. of Michigan Press, 1953; [16], гл. 8.

$\nabla^2 u_i = \partial(\nabla^2 U)/\partial x_i = 0$ для любого безвихревого несжимаемого потока, любое решение задачи Неймана (течение Жуковского или Эйлера) должно удовлетворять уравнениям Навье — Стокса (5). Таким образом, учет зеркального отражения должен был бы вызвать полный пересмотр теории вязких течений.

Для объяснения экспериментальных фактов вместо понятия зеркального отражения вводят квазиэмпирический «коэффициент аккомодации». Пользуясь таким коэффициентом и учитывая постулируемое в кинетической теории газов конечное значение средней длины свободного пробега, были получены результаты, в общем согласующиеся с данными эксперимента.

«Скольжение» в течении разреженного газа нельзя смешивать с представлениями девятнадцатого столетия об общем скольжении на границе весьма гладких твердых тел (например, Hg по стеклу). Так, Стокс [1]) считал, что «скольжение» должно наступать начиная с определенной скорости, тогда как многие другие выдающиеся ученые воздерживались от высказываний по этому вопросу. Ввиду многих особенностей физики поверхностей такое положение не слишком удивительно. Подтверждением взглядов Стокса могла быть и предполагаемая аналогия с трением твердых тел, при котором напряжение сдвига τ ограничено произведением постоянной $\mu < 1$ на нормальное давление. Даже в настоящее время, несмотря на то что подавляющее число фактов свидетельствует против аналогии с понятием общего скольжения [2]), всеобщей и абсолютной уверенности в этом вопросе пока не достигнуто.

§ 35. Выводы

Кратко изложенные выше факты являются серьезным доводом в пользу пригодности уравнений Навье — Стокса для потоков *несжимаемых* вязких жидкостей, к которым относятся течения обычных газов и жидкостей при скоростях, значительно меньших скорости распространения звука (т. е. если $M < 0{,}2$). Однако для большинства приложений нельзя полагаться на правдоподобные гипотезы, перечисленные в § 1, хотя эти гипотезы в других условиях могут оказаться полезными. Поэтому особенно при рассмотрении *турбулентности* требуется весьма

---

[1]) [13], т. 1, стр. 96—99. См. там же и стр. 186.

[2]) Систематизированный обзор фактов относительно общего скольжения см. в работе [3], т. 2, стр. 356—361. Последние данные см. Brockman M. R., *Nat. Bu. Standards Rep.*, **4673** (1956); Schnell E., *J. Appl. Phys.*, **27** (1956), 1149—1152; Debye P. and Cleland R. L., там же, **30** (1959), 843—849.

аккуратное применение статистического анализа на высоком математическом уровне.

Так, вместо использования уравнений Навье — Стокса при формулировке очевидных краевых задач (например, задачи стационарного течения) нужно обращаться непосредственно к *физической действительности* для постановки соответствующих краевых задач.

Подобное положение никоим образом не является чем-то новым в анализе, хотя об этом часто забывают. Так, открывая Первый международный математический конгресс, Пуанкаре сказал: «Каким бы богатым ни было воображение человека, природа еще богаче в тысячу раз», и далее: «Каждая физическая теория... по-новому освещает уравнения (в частных производных)... Без этих теорий мы не знали бы, что такое уравнения в частных производных» [1]). С тех пор эти основные истины подтверждались и другими выдающимися математиками, и их всегда следует помнить.

Менее ясно, какие свойства можно законным образом приписать *сжимаемым* вязким жидкостям. Хотя можно надеяться, что какое-то видоизменение уравнений Навье — Стокса будет хорошо соответствовать физическим фактам, остается неясным, как увязать это видоизменение с термодинамикой.

Для полной строгости нужно учитывать как теплопроводность и излучение, так и нагрев за счет трения и изменение вязкости и плотности с изменением температуры. Строгое решение возникающих при этом краевых задач и доказательство того, что задачи корректно поставлены, по-видимому, почти безнадежная проблема. Столь же, если не более, трудным делом представляется строгое применение методов теории возмущения, обосновывающее пренебрежение отдельными переменными. Достижение успеха в этом случае будет зависеть от использования гипотез (A) — (F) из § 1 и других подобных эвристических предположений.

Однако довольно обобщений! Теперь, не связывая себя строгой программой, мы перейдем к изучению трех различных концепций гидродинамики, чтобы получить более глубокое представление о том, какого рода соображения характеризуют существо вопроса. Мы имеем в виду теорию струй, подобие и присоединенные массы.

---

[1]) Poincaré H., Proc. First Int. Math Congress, Zürich, 1897, стр. 81—90. Подтверждения этой точки зрения см. Hadamard J., Lectures on Cauchy's problem, Yale Univ. Press, 1923, стр. 23 и Courant R., Proc. Eleventh Int. Math. Congress, Cambridge (USA), 1950, т. 2, стр. 278.

Глава III

СТРУИ, СЛЕДЫ И КАВИТАЦИЯ

§ 36. Разрывные течения

При движении реальных жидкостей с малой вязкостью обычно можно заметить, что поток стремится *отделиться* от твердых стенок, особенно у острых углов. Это было уже отмечено в § 8, где на рис. 2, *в* изображено такое течение, а также в § 29.

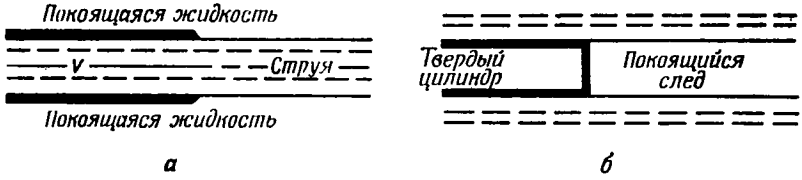


Рис. 9. *а* — прямая струя идеальной жидкости; *б* — след позади полуцилиндра в идеальной жидкости.

Математические модели подобных течений с отрывом можно довольно легко построить, используя уравнения движения Эйлера для *невязкой* жидкости. Основная идея состоит в том, что допускается скачкообразное изменение скорости при переходе через линию тока, что является грубым нарушением гипотезы (Е) из § 1. Простые примеры таких течений схематически изображены на рис. 9. В этих течениях все линии тока параллельны друг другу, а области равномерного течения отделены от областей стоячей воды *линиями тока*, при переходе через которые скорость изменяется *скачком*. На рис. 9, *а* изображена идеализированная бесконечная *струя*; поступающая в область неподвижной воды из трубы произвольного поперечного сечения, а на рис. 9, *б* изображен равномерный поток, отрывающийся от полуцилиндра со стороны среза и обтекающий застойный *след* позади этого полуцилиндра. В обоих случаях давление можно считать гидростатическим.

По определению, в идеальной невязкой жидкости усилие сдвига равно нулю; следовательно, необходимое и достаточное

условие равновесия на линии тока, являющейся линией разрыва, — это *непрерывность давления* при переходе через нее.

Если линия тока ограничивает идеализированный след или какую-либо другую область, заполненную неподвижной жидкостью («мертвая вода»), а сила тяжести учтена согласно теореме 1 из § 21, то условие непрерывности давления равносильно условию постоянства давления в рассматриваемой области. Поэтому ввиду непрерывности давления на линиях тока, ограничивающих след, давление должно быть постоянным. Линии тока, на которых скорость изменяется скачком, а давление постоянно, называются *свободными линиями тока*.

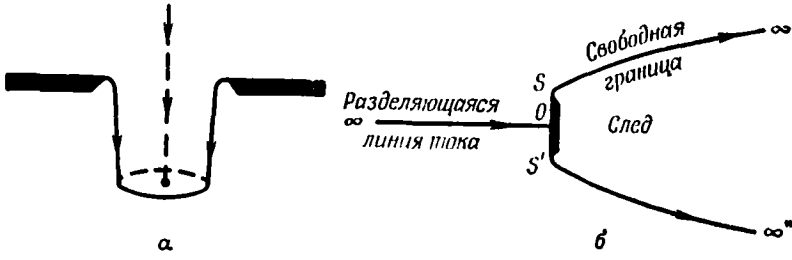


Рис. 10. *а* — круглая струя; *б* — след позади диска.

В силу уравнения Бернулли (8*) гл. I, если все еще пренебрегать силой тяжести, скорость остается постоянной вдоль любой свободной линии тока при стационарном течении, и наоборот: $v\,dv = -dp/\rho = 0$. Это дает чисто кинематическое краевое условие для стационарных течений, ограниченных свободными линиями. Вместе с формулами § 5 оно определяет следующую краевую задачу теории потенциала.

Задача Гельмгольца. Для заданного препятствия R найти потенциал скоростей, удовлетворяющий 1) уравнению $\nabla^2 U = 0$ вне препятствия R и вне области «мертвой воды» R_1; 2) условию $\partial U/\partial n = 0$ на границах препятствия R и области R_1 и 3) условию $|\nabla U|^2 = \text{const}$ на границе области R_1.

Заметим, что последнее краевое условие *нелинейно*. Заметим также, что топология течения осталась неопределенной; на практике ее задают исходя из интуитивных представлений или экспериментальных данных (гипотеза (D) из § 1). Две такие топологии течения схематически изображены на рис. 10. На этих рисунках показаны «струя», вытекающая из круглого отверстия в плоской стене, и «след» за диском.

Течения, удовлетворяющие указанным условиям 1)—3), т. е. решения задачи Гельмгольца, в последующем мы будем называть *течениями Гельмгольца*.

В действительности же никто еще не сумел дать точную математическую трактовку указанных выше двух течений Гельмгольца, см. § 49. Однако аналогичные течения для плоского случая, т. е. струя, вытекающая из щели, и след позади плоской пластинки, можно построить довольно легко. Теория этих плоских течений Гельмгольца будет предметом исследования в § 37—39[1]).

§ 37. Годографы в виде полукруга

В общем случае локально безвихревые несжимаемые плоские течения характеризуются существованием *комплексных потенциалов* $W = U + iV$. Здесь U — потенциал скоростей, а V — функция тока. Комплексный потенциал W есть аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$, характеризующей положение точки, а ее производная

$$\frac{dW}{dz} = \zeta = u - iv \tag{1}$$

представляет собой *сопряженное значение* комплексной скорости[2]) $u + iv = \zeta^*$, где $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$.

Если известен потенциал $W = f(\zeta)$ как комплексная аналитическая функция ζ, то, следовательно, можно определить z в виде аналитической функции от ζ, т. е.

$$z = \int \zeta^{-1} f'(\zeta)\, d\zeta = \int \zeta^{-1}\, dW. \tag{2}$$

и следовательно, можно (в принципе), исключив ζ, найти $W(z)$. Итак, для определения стационарного плоского течения Гельмгольца достаточно знать функциональное соотношение $W = f(\zeta)$. Каков вид этой функции в случае плоских течений, приведенных на рис. 10, можно догадаться по годографам рассматриваемых течений.

Годографом плоского течения называется геометрическое место тех значений ζ, которые действительно достигаются в этом течении. Из рис. 10 легко видеть, что годографы соответствующих плоских течений (если они существуют) должны быть *полукругами*. Это следует из того, что $\arg \zeta$ (направление течения) — величина, постоянная на плоских пластинках (фиксиро-

[1]) В русской литературе принят термин «теория струй», в эту теорию входит изучение всех течений со свободными поверхностями, на которых давление постоянно. — *Прим. ред.*

[2]) В русской литературе комплексной скоростью называется сама величина $dw/dz = u - iv$. — *Прим. ред.*

ванных границах), в то время как $|\zeta|$ (скорость течения) постоянна вдоль свободных границ, как показано в § 36.

С другой стороны, область W, или геометрическое место значений, принимаемых в данном течении величиной W, ограничена линиями $V = \text{const}$ (линии тока), параллельными действительной оси U. На рис. 10, *а* — это бесконечная полоса. Для случая на рис. 10, *б* — это полуплоскость, разрезанная вдоль положительной оси U (если выбрать постоянную интегрирования в $W = \int \zeta\, dz$ так, чтобы в критической точке было $W = 0$).

Аппарат конформного отображения. Пусть теперь Ф — любое течение, имеющее годографом полукруг (следовательно, ограниченное свободными линиями тока и прямолинейными стенками). Мы можем так выбрать оси координат, что величина ζ будет принимать действительные значения на неподвижной границе, и так выбрать единицы измерения, что на свободной границе будет $|\zeta| = 1$. Затем с помощью преобразования $\sigma = (\zeta + \zeta^{-1})/2$ отобразим область годографа на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\{\sigma\} < 0$. Конформное преобразование наиболее общего вида, отображающее область годографа на нижнюю полуплоскость, задается формулой

$$T = \frac{a\sigma + b}{c\sigma + d} = \frac{a(\zeta^2 + 1) + 2b\zeta}{c(\zeta^2 + 1) + 2d\zeta}, \quad ad > bc, \tag{3}$$

где a, b, c, d — действительные числа.

С другой стороны, область W любого односвязного течения, ограниченного линиями тока, есть обобщенный «многоугольник», одна или большее число вершин которого расположены на бесконечности и все стороны которого параллельны действительной оси. Следовательно, можно отобразить область T, определяемую соотношением (3), на область W при помощи подходящего (конформного) преобразования Шварца — Кристоффеля:

$$\frac{dW}{dT} = R(T) = \frac{C\prod_j (T - B_j)}{\prod_k (T - T_k)}, \tag{4}$$

где C и B_j, T_k — *действительные* параметры ([4], стр. 370). Мы видим, что для любого односвязного течения Ф, у которого область годографа есть полукруг, можно записать W в виде $\int A(\zeta)\, d\zeta$, используя формулы (3) и (4), где $A(\zeta)$ — *рациональная функция.*

Рассмотренный выше метод можно легко обобщить на случай, когда область годографа есть круговой сектор с углом,

при вершине равным π/n ([17]), гл. II). В этом случае преобразование ζ^n отображает область годографа на полукруг и, следовательно, соотношение

$$T = \frac{a(\zeta^{2n}+1)+2b\zeta^n}{c(\zeta^{2n}+1)+2d\zeta^n}$$

представляет собой отображение области годографа на полуплоскость. А дальше мы действуем, как в предыдущем случае.

§ 38. Истечение струи из щели

Гельмгольц [27] первый применил в 1868 г. описанный выше аппарат к случаю плоской струи, вытекающей из щели, см. рис. 11, *а*. В этом случае, выбрав единицу длины так, чтобы скачок V при переходе через отверстие был равен π, мы можем в формулах § 37 положить $W = \ln T$, $T = e^W$. $dW/dT = 1/T$.

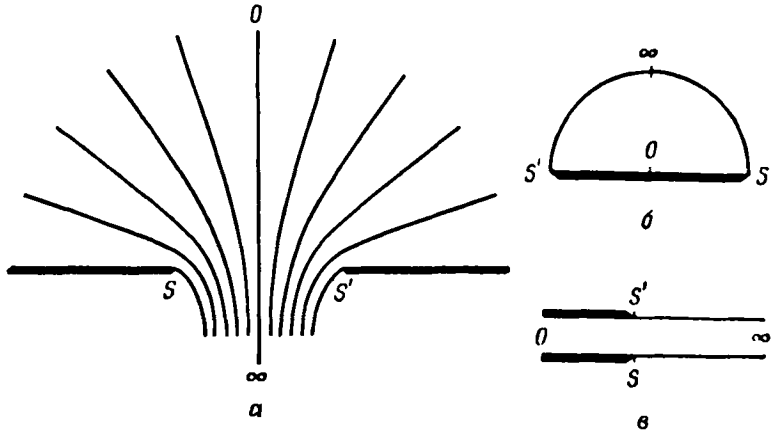


Рис. 11. Плоская струя, вытекающая из щели.

Для выбора величин a, b, c, d рассмотрим зависимость между ζ и W в физической плоскости. Очевидно, что предел $\zeta = 0$ в области годографа на рис. 11, *б* достигается тогда, когда $W = -\infty$ в области W на рис. 11, *в* или, что эквивалентно, когда $T = 0$. Из этого следует $a = 0$ в формуле (3). С точностью до подобия мы можем теперь написать равенства

$$T = \frac{\zeta}{\zeta^2 - 2C\zeta + 1}, \qquad W = \ln T, \qquad C = -d/c. \tag{5}$$

Точка струи, лежащая на бесконечности, где $W = +\infty$, очевидно, соответствует значению $\zeta = e^{i\alpha}$, $(\zeta + \zeta^{-1})/2 = \sigma = C =$

$= \cos\alpha$. Следовательно, уравнения (2) и (5) определяют *струю, вытекающую из щели* в бесконечной пластинке и образующую с этой пластинкой угол α. Так как подинтегральное выражение в формуле (2) представляет собой рациональную функцию, мы можем произвести интегрирование в замкнутом виде и получим, учитывая равенства (5), следующее соотношение:

$$W = \ln\zeta - \ln(\zeta^2 - 2C\zeta + 1); \tag{6}$$

детали вычислений мы здесь опускаем. Случай *вертикальной* струи, рассмотренный Гельмгольцем, соответствует $C = \cos\alpha = 0$.

§ 39. Схема обтекания Кирхгофа

В 1869 г. Кирхгоф [31] выполнил аналогичные расчеты для следа позади пластинки. В этом случае преобразование $W = T^2$ отображает нижнюю полуплоскость на плоскость с разрезом, являющуюся областью W; таким образом, $R(T) = 2T$ в формуле (4), если направить действительную ось вдоль пластинки.

Для того чтобы определить постоянные a, b, c, d в формуле (3), мы снова рассмотрим зависимость между W и ζ в физической плоскости. Точка $W = 0$, в которой начинается разрез, соответствует критической точке течения, в которой $\zeta = 0$. Отсюда $a = 0$, и мы снова можем написать равенства (5), помня при этом, что $C = \cos\alpha$ определяет направление течения на бесконечности.

Наиболее интересен случай обтекания пластинки под *прямым* углом; он представляет собой плоское течение, аналогичное изображенному на рис. 10, *б*. В этом случае равенства (5) сводятся к виду

$$W = T^2 = \left(\frac{\zeta}{\zeta^2+1}\right)^2. \tag{7}$$

Выполняя интегрирование, указанное в формуле (2), мы на этот раз получаем следующее соотношение:

$$z = \frac{\zeta}{(\zeta^2+1)^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\zeta}{\zeta^2+1} - \frac{i}{2}\ln\frac{\zeta-i}{\zeta+i}\right\} + \text{const} \tag{8}$$

для всех значений $\zeta = \xi + i\eta$.

Вдоль пластинки величина ζ принимает действительные значения и соотношение (8) сводится к виду

$$z = \frac{\zeta}{(\zeta^2+1)^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\zeta}{\zeta^2+1} + \operatorname{arc\,tg}\zeta\right\}, \tag{8a}$$

где, очевидно, $z(0) = 0$, и, таким образом, постоянная интегрирования равна нулю. В правой точке отрыва $S\zeta = 1$, следовательно,

$$z(S) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right\} = \frac{4+\pi}{8}. \tag{8б}$$

Давление легче всего вычислить, положив $\zeta = \xi = \operatorname{tg}\theta$ вдоль пластинки, так что $\zeta/(\zeta^2+1) = \sin\theta\cdot\cos\theta = 1/2\sin 2\theta$. Следовательно, в силу теоремы Бернулли[1]) и формулы (8а), давление на пластинку равно интегралу

$$\int_{\xi=0}^{1}(1-\xi^2)\,dx = \int_{\xi=0}^{1}\frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}\theta}\,d\left[\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\right] = \int_{\theta=0}^{\pi/4} 2\cos^2 2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Отношение этой величины к половине длины пластинки, очевидно, представляет собой коэффициент лобового сопротивления, который, таким образом, равен величине

$$C_D = \frac{2\pi}{\pi+4} = 0{,}88. \tag{9}$$

Аналогичные, но более сложные подсчеты для случая обтекания пластинки под острым углом $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ позволяют получить следующие формулы[2]):

$$C_D = \frac{2\pi\sin^2\alpha}{4+\pi\sin\alpha}, \qquad C_L = \frac{\pi\sin 2\alpha}{4+\pi\sin\alpha}. \tag{9'}$$

§ 40. Влияние стенок

Метод годографа[3]) можно также применить с целью получения информации относительно влияния стенок на струю при истечении из сопла.

Рассмотрим, по Гельмгольцу, обтекание пластины, половина ширины которой равна b и которая удерживается в симметричном положении в струе из сопла, как показано на рис. 12, *а*. Так же как и раньше, функции $W(z)$ и $\zeta(z)$ конформно отображают течение на бесконечную полосу с разрезом и на полукруг соответственно.

---

[1]) Автор предполагает, что плотность жидкости равна единице. — *Прим. ред.*

[2]) Через C_L обозначен коэффициент подъемной силы. — *Прим. ред.*

[3]) См. [17], гл. II, § 7, 8; а также гл. I, § 11.

Это опять-таки следует из того, что область W ограничена линиями тока, на которых $V = \text{const}$, включая линию тока, разделяющуюся в критической точке. Область годографа ограничена свободными линиями тока, на которых величина ζ постоянна, и неподвижной пластинкой, вдоль которой величина ζ направлена вертикально.

С математической точки зрения удобно так выбрать начало координат и единицы измерения, чтобы область W представляла собой полосу $-\pi < V < \pi$, разрезанную вдоль положительной полуоси $W = U > 0$, а область годографа — полукруг $|\zeta| < 1$, $-\frac{\pi}{2} < \arg\zeta < \frac{\pi}{2}$.

Удобно также рассматривать только нижнюю *половину* течения.

При этих условиях область значений $T = e^W$ совпадает с полуплоскостью. Так как преобразование ζ^2 отображает половину области годографа на единичный полукруг $0 < \arg\zeta < \pi$, $|\zeta| < 1$, то функция $(\zeta^2 + \zeta^{-2})/2$ отображает ее на полуплоскость. В силу основной теоремы о единственности конформного отображения, отсюда следуют соотношения:

$$W = \ln T,$$

$$T = \frac{a(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + 2b}{c(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + 2d}, \qquad (10)$$

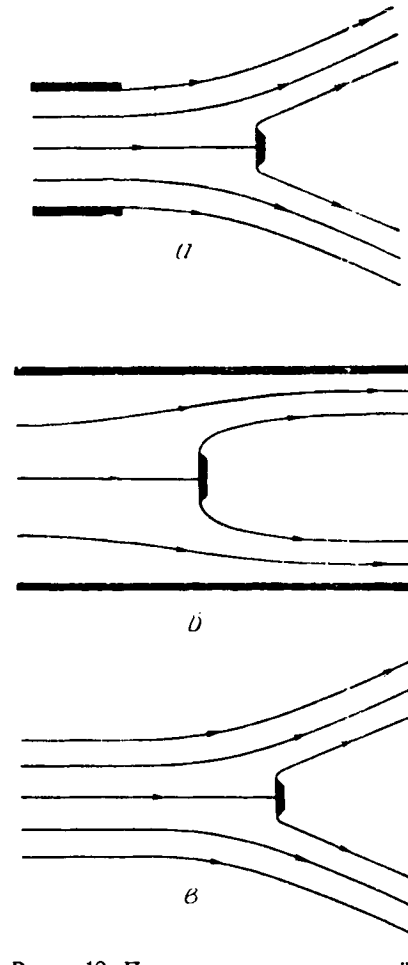


Рис. 12. Примеры плоских течений.

а — пластинка в струе, вытекающей из сопла; *б* — пластинка в канале; *в* — пластинка в свободной струе.

где величины a, b, c, d — действительные числа. Эти действительные постоянные можно связать с геометрическими свойствами течения. Если $v < 1$ — скорость течения в сопле (предполагаемая постоянной) и $e^{-i\alpha}$ — скорость в нижней струе, то $\zeta = v$,

когда $W = -\infty$ и $T = e^W = 0$, в то время как $\zeta = e^{i\alpha}$, когда $W = T = \infty$. Таким образом, отбрасывая постоянные слагаемые, получим следующее выражение:

$$W = \ln[(\zeta^2 - e^{2i\alpha})(\zeta^2 - e^{-2i\alpha})] - \ln[(\zeta^2 - v^2)(\zeta^2 - v^{-2})] = \\ = \ln[\zeta^4 - 2C\zeta^2 + 1] - \ln[\zeta^4 - (v^2 + v^{-2})\zeta^2 + 1], \qquad (11)$$

где $C = \cos 2\alpha$. Поскольку из формулы (2) $z = \int \zeta^{-1}\, dW$, это выражение можно проинтегрировать элементарным способом и получить $z(\zeta)$ в замкнутом виде [1]).

Особый интерес представляют случай $C = 1$ — пластина в *закрытом канале* (рис. 12, *б*), для которого можно получить соотношение

$$z = 4 \operatorname{arc\,th} \zeta - 2v \operatorname{arc\,th} v\zeta - \frac{2}{v} \operatorname{arc\,th} \frac{\zeta}{v}, \qquad (12а)$$

и случай $v = 1$ — пластина ширины π в *свободной струе*, (рис. 12, *в*), для которого можно получить соотношение

$$z = 2\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta} - e^{i\alpha}\ln\frac{1+e^{i\alpha}\zeta}{1-e^{i\alpha}\zeta} - e^{-i\alpha}\ln\frac{1+e^{-i\alpha}\zeta}{1-e^{-i\alpha}\zeta}. \qquad (12б)$$

Используя формулы (12а), (12б), можно показать, что поправка на влияние стенок для коэффициента C_D мала, если исходить из скорости на свободной линии тока, но она очень велика, если исходить из скорости вверх по течению. Так, она составляет 30%, если (двумерный) туннель имеет ширину в 100 диаметров. В случае свободной струи эта поправка мала, и рассмотренная выше проблема не возникает.

§ 41. Неустойчивость течений Гельмгольца

К сожалению, свободные границы струй и следов, рассмотренные Гельмгольцем и Кирхгофом, *неустойчивы*. Это было известно уже Гельмгольцу ([27], стр. 222), который заметил, что границы струй, вытекающих из духовых труб, закручиваются в виде периодических спиралей.

Кроме того, наблюдения показывают, что при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} > 10^4$ линии тока, которые отделяются от плоской пластинки (или другого препятствия) в движущемся потоке, вскоре прекращают свое существование в турбулентной «зоне смешения». Вследствие этого реальный след никоим образом не представляет собой неподвижную полосу «мертвой воды», простирающуюся в бесконечность, как полагал Кирхгоф. Реальные следы заполнены вихрями, которые наиболее активны

[1]) Задачи, рассмотренные в § 40, впервые были решены в 1890 г. Н. Е. Жуковским [15*]. — *Прим. ред.*

в зоне смешения, и эти вихри непрерывно выносят жидкость вниз по течению за пределы следа.

Чтобы объем жидкости, образующей след, оставался одним и тем же, необходимо, чтобы в центре следа поддерживалось обратное течение. В результате этого в потоке появляются два вихря, как это изображено на схеме рис. 13. Эти вихри поддерживаются значительным градиентом давления, они намного уменьшают давление p_w в кильватерной зоне позади пластинки.

Ввиду такой крайней неустойчивости в реальных следах получается значительное понижение давления: давление в них p_w

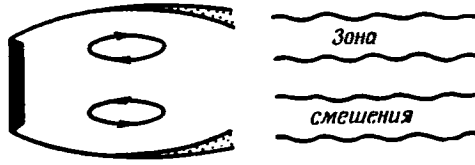


Рис. 13. Обратное течение в реальном следе.

гораздо меньше давления p_a в смежных областях. Как следствие этого найденный Кирхгофом теоретически коэффициент сопротивления $C_D = 0{,}88$ меньше, чем половина действительного значения C_D, которое приблизительно равно двум. Для наклонных пластинок значение подъемной силы C_L в модели Кирхгофа занижено даже в большей мере, особенно при углах, меньших «критического угла» (около 15°).

Если бы это было не так, то полет самолета был бы крайне затруднен. Это заметил Рэлей ([12], т. I, стр. 287, и т. III, стр. 491) уже в 1876 г. К счастью, модель Жуковского из § 8 является гораздо лучшим приближением действительной картины при малых углах атаки. (Кроме того, отрыв потока можно намного задержать при помощи соответствующей конструкции крыла, как уже было объяснено в § 29.)

Эти факты были хорошо известны Кельвину [1]), который получил более важный результат: он показал, как можно количественно исследовать устойчивость прямолинейных линий тока в плоскопараллельном течении.

Очень большой интерес представляет случай горизонтальной границы в вертикальном поле силы тяжести. Граница разделяет две жидкости с плотностями ρ и ρ', которые движутся соответственно со скоростями u и u', как указано на рис. 14. Кельвин показал, что в этих условиях синусоидальное возмуще-

[1]) *Nature*, 50 (1894), стр. 524, 549, 573; см. также Рэлей [38], т. 6, стр. 39

ние граничной поверхности с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ должно возрастать по экспоненциальному закону $\exp\{l(\lambda)t\}$, где

$$[l(\lambda)]^2 = \frac{\rho\rho' k^2}{(\rho+\rho')^2}(u'-u)^2 - \frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'}gk - \frac{\gamma k^3}{\rho+\rho'}, \quad . \quad (13)$$

причем γ есть натяжение на граничной поверхности, а g — ускорение силы тяжести. Его доказательство приведено в работе [7], п. 266—267.

В случае следов, когда $\rho = \rho'$ и $\gamma = 0$, очевидно, мы имеем $l(\lambda) = k|u' - u|/2 > 0$. Граничная поверхность в высшей степени неустойчива, скорость нарастания возмущений с очень короткой длиной волны *не ограничена*. Так, например, на расстоянии в n длин волны, $|u' - u|t = n\lambda = 2\pi n/k$, скорость нарастания определяется множителем $e^{2\pi n}$ в относительном движении [1]).

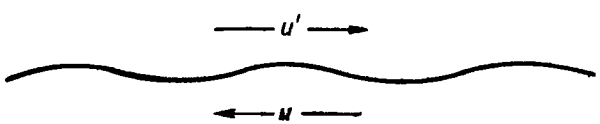


Рис. 14. Неустойчивость по Гельмгольцу и Кельвину.

Волны, вызываемые ветром. Кельвину мы обязаны классическим применением его формулы (13) для расчета минимальной скорости ветра, требующейся для возникновения ряби на поверхности спокойной воды. Вероятно, каждому доводилось наблюдать, что при достаточно легком бризе поверхность прудов остается зеркально гладкой. Теоретически можно показать, что для равномерно дующего ветра при обычном отношении плотности воздуха к плотности воды, равном $\rho'/\rho = 0{,}00126$, из формулы (13) следует, что возмущения всех длин волн будут безразлично устойчивы тогда и только тогда, когда $|u' - u| < 646$ *см/сек*. В действительности волны возникают при ветрах со средней скоростью, меньшей чем $^1/_5$ этой величины; простое и убедительное объяснение этого парадокса еще предстоит найти [2]).

§ 42. Кавитация

Когда твердое тело движется в жидкости с большой скоростью, его след обычно заполняется газом. Такой заполненный

[1]) Многие струйные течения при $\rho' = 0$ обладают «нейтральной устойчивостью», см. Fox J. L., Morgan G. W., *Quart. Appl. Math.*, 11, 4, 1954. — *Прим. ред.*

[2]) Ursell F. недавно дал обзор этой задачи в работе [20], стр. 216—249; резюме некоторых экспериментальных данных см. там же на стр. 240.

газом след называют *каверной*, и решения задачи Гельмгольца описывают обтекание каверны гораздо лучше, чем они описывают самый след.

Естественным образом каверны возникают при различных условиях. Так, можно сфотографировать [38] заполненные воздухом каверны позади сфер, падающих в воду с высоты двух метров и больше. Заполненные паром каверны образуются позади подводных снарядов, скорость которых превышает, скажем, 30 *м/сек*. Подобные каверны также обычно образуются на лопастях судовых винтов при давлении на поверхности винта, превышающем примерно 1,5 *кг/см*^{2}, и в таких случаях опасаются разрушения маленьких пузырьков, сопутствующих «возникновению кавитации» как причины эрозии винта. Подобная эрозия (и по той же причине) может происходить при перегрузке гидротурбин. Парадоксально, что «суперкавитационные» винты, работающие при гораздо бóльших давлениях и притом в больших кавернах, можно сконструировать так, чтобы избежать этой эрозии.

Впервые практическое значение кавитации было отмечено примерно в 1900 г. Математический анализ этих явлений основан на правдоподобном предположении, что заполненные паром каверны образуются благодаря испарению, как только давление в жидкости падает ниже вполне определенного значения — «давление испарения» p_v. Математически это эквивалентно условию

$$p = p_v \text{ в каверне}; \quad p \geqslant p_v \text{ в жидкости}. \tag{14}$$

(В кавернах, заполненных воздухом, конечно, возможно $p > p_v$.)

Руководствуясь этой идеей, Тома ввел [1]) в 1924 г. широко применяемый в настоящее время *параметр кавитации* (кавитационное число)

$$Q_v = \frac{p_a - p_v}{\frac{1}{2}\rho v^2}, \tag{15a}$$

где p_a — давление во внешней области. Вскоре после этого Аккерет и другие авторы [2]) показали, что теория течений Гельмгольца применима к кавернам больших масштабов позади твердых препятствий. Но в первую очередь развитию теории кавитации, какой она является в настоящее время, способствовали работы по применению подводных снарядов во время второй мировой войны.

---

[1]) Thoma D., Trans. First World Power Conf. (1924), т. 2, 536—551; см. также Taylor H. B., Moody L. F., *Mech. Engineering*, 44 (1922), 633—640; см. § 72.

[2]) Ackeret J., *Tech. Mech. und Thermodynamik*, 1 (1930), 1—21 и 63—72. В 1932 г. Weinig впервые применил модель Рябушинского из § 7 к кавитационным течениям.

§ 43. Параметры ρ'/ρ и Q

Определенные выше эмпирическим путем параметры ρ'/ρ и Q_v время от времени упоминались в инженерной литературе, но в учебниках теоретической гидродинамики [1]) отсутствовали вплоть до 1945 г. В настоящее время эти параметры дают ключ ко многому при исследовании течений Гельмгольца. Например, при помощи параметра ρ'/ρ можно объяснить, почему стационарные кавитационные течения и струи жидкостей в воздухе (т. е. *двухфазные* течения) описываются по Гельмгольцу гораздо лучше, чем следы или, скажем, газовые струи.

В случае скоростных торпед члены, содержащие g и γ в формуле (13), относительно малы. Следовательно, если $\rho' \ll \rho$, то в первом приближении получим равенство $I(\lambda)=(k|u'-u|/2)\sqrt{\rho'/\rho}$. Это приводит к выводу, что *расстояние* $|u'-u|t$ от точки отрыва до зоны перемешивания, где модель Гельмгольца теряет силу при данной длине волны λ, будет пропорционально $\sqrt{\rho/\rho'}$. Для каверн, заполненных воздухом, $\rho/\rho' \simeq 750$, а для каверн, заполненных паром, $\rho/\rho' \simeq 30\,000$; следовательно, в обоих случаях, согласно анализу Кельвина, надо ожидать, что неустойчивость свободных линий будет невелика.

Этим теоретически объясняется эмпирическое утверждение Бетца и Петерсона [2]), что *теория струй применима, если* $\rho'/\rho \ll 1$. Эти авторы основывались на работе Аккерета и на более ранних работах Мизеса, проверявшего теоретические расчеты для струй воды в воздухе. Например, хотя влияние стенок, описанное в § 40, не сказывается в реальных следах, для которых оно первоначально было рассчитано [3]), оно весьма существенно при наличии реальных каверн.

Практическое применение теории струй зависит также от второго параметра, который совпадал бы с выражением (15а), если бы условия (14) были точными. Если предположить, что условия (14) и уравнение Бернулли выполняются для теоретического двухфазного течения Гельмгольца, то выражение (15а) принимает вид $Q_c = (v_f/v_a)^2 - 1$, где v_f — скорость на свободной линии тока, а v_a — скорость во внешней

---

[1]) См. [7], п. 73—80 и гл. XII первого издания [8]. Контраст с данными книги [2], гл. II, поразителен; см. также Proc. Seventh Int. Congress Appl. Mech., London, 1948, т. 2, стр. 7—16.

[2]) *Ingenieur Archiv*, 2 (1931), 190—211. Относительно данных Мизеса, подтверждающих формулы, выведенные в § 40, см. *Zeits. VDI*, 61 (1917), 447—452, 467—473 и 493—497.

[3]) Volcovici V., Inaugural dissertation, Goettingen, 1913. Относительно приложений к кавитации см. Birkhoff G., Plesset M. and Simmons N., *Quar. Appl. Math.*, 8 (1950), 151—168 и 9 (1952), 413—421.

области («скорость свободного потока»). Поэтому *теоретический* параметр кавитации для течения Гельмгольца мы определим выражением

$$Q = \left(\frac{v_f}{v_a}\right)^2 - 1. \tag{15б}$$

Ясно, что для идеальной жидкости из условий (14) следует $Q > 0$. Для каверн, заполненных воздухом, эмпирический коэффициент падения давления также всегда положителен и определяется формулой

$$Q_c = \frac{p_a - p_c}{{}^1/_2 \rho v^2}, \tag{15в}$$

где p_c — давление в каверне. Наконец, эмпирически найдено, что *падение давления в следе* ($p_a - p_w$), упомянутое в § 41 и выраженное в безразмерной форме через коэффициент падения давления в следе

$$Q_w = \frac{p_a - p_w}{{}^1/_2 \rho v^2}, \tag{15г}$$

заключено между нулем и единицей. Таким образом, за плоской пластинкой значения Q_w близки к единице.

Принимая величину Q_w в качестве эмпирического параметра, теорию струй можно плодотворно применить даже к *следам*. Так, если ввести поправочный числовой множитель $(1 + Q_w)$, для того чтобы учесть наблюдаемое падение давления в следе за наклонной плоской пластинкой, то формулы теории Кирхгофа хорошо согласуются с получаемыми на практике функциями распределения давлений на передней поверхности ([17], стр. 28, рис. 3) — по крайней мере если $\alpha > 15°$, т. е. больше критического угла.

Условие $Q > 0$, очевидно, легко отождествить в случае невязкой жидкости со следующим чисто кинематическим условием, введенным в 1911 г. М. Бриллюэном [19] в связи с исследованием следов [1]).

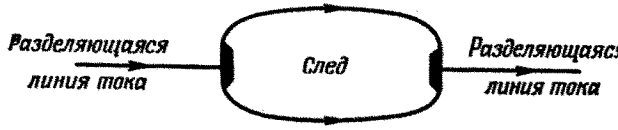
Условие Бриллюэна. Скорость принимает максимальное значение на свободной линии тока.

Хотя во всех известных нам практических приложениях выполнено условие $Q > 0$, было бы неправильным предполагать, что условие (14) строго выполняется при любых обстоятельствах. (См. работу [17], гл. XV.)

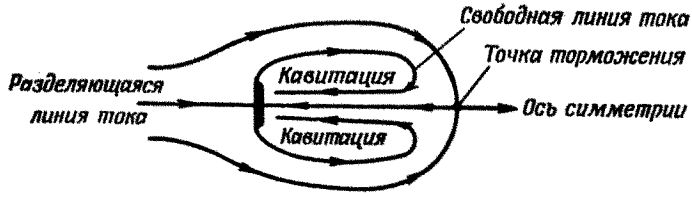
[1]) Что условие Бриллюэна выводится из формул (14), указано в работе [2], стр. 51; см. также § 45.

§ 44. Модели течений при $Q \neq 0$

В случае обтекания пластинки в канале, формула (12а), можно считать Q положительной величиной, вводя в рассмотрение скорость вверх по течению (равную единице, что достигается выбором единиц измерения) в качестве скорости свободного потока. При таком условии $Q = v^{-2} - 1 > 0$ и $1 + Q = v^{-2}$. Таким образом, предположение о том, что при определении коэффициента C_D нужно использовать скорость на свободной линии



а



б

Рис. 15. *а* — течение Рябушинского; *б* — возвратная струя.

тока, $v = v_f$ эквивалентно введению в предыдущем параграфе множителя $(1 + Q_w)$.

Однако построить течения Гельмгольца с условием $Q \neq 0$ в бесконечном потоке гораздо труднее. Кроме того, реальные каверны имеют конечные размеры, а построить течения Гельмгольца с конечными кавернами особенно трудно из-за следующего парадокса.

Парадокс Бриллюэна. *Каверны конечного размера, удовлетворяющие условию Бриллюэна, математически невозможны.*

Ниже мы кратко рассмотрим доказательство (см. [19]). Поскольку давление внутри каверны минимально (условие Бриллюэна), свободные линии тока обращены своей вогнутостью в сторону каверны, которая должна быть поэтому выпуклой. Но такая каверна должна иметь критическую точку, в которой схо-

дятся две свободные линии тока, с минимальным давлением p_s. По теореме Бернулли из этого следует, что $|u|^2 = 2(p_s - p)/\rho \leqslant 0$ везде, за исключением свободной границы, а это означает, что $u = 0$ тождественно.

Чтобы избежать парадокса Бриллюэна, были построены различные модификации течения Гельмгольца путем искусственного изменения задней части каверны. Можно полагать, что таким образом будет выполнено условие $Q \neq 0$ без значительного искажения течения около препятствия, создающего каверну.

Так, в 1921 г. Рябушинский [39] построил течение Гельмгольца со свободными линиями тока для двух симметрично расположенных пластинок (см. рис. 15, *а*) с условием $Q > 0$. Это построение можно кратко описать следующим образом (см. [17], гл. V, § 9).

«Область годографа» (т. е. диаграмма на ζ-плоскости) одной четверти течения, очевидно, представляет собой четверть круга, а область W — квадрант ввиду вертикальной и горизонтальной симметрии. Следовательно, конформное отображение области годографа на область W выполняется (см. § 40) по формуле

$$W^2 = \frac{a(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + b}{c(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + d} = C\,\frac{\zeta^4 + 2\lambda\zeta^2 + 1}{\zeta^4 + 2\mu\zeta^2 + 1}. \tag{16а}$$

Посредством выбора единиц измерения мы можем свести все к случаю $C = 1$ и $\zeta = 1$ при $W = \infty$, из чего следует $\mu = -1$.

После этого получим соотношение

$$W = \frac{\sqrt{\zeta^4 + 2\lambda\zeta^2 + 1}}{(\zeta^2 - 1)}, \tag{16б}$$

откуда величину $z = \int dW/\zeta$ можно получить в виде эллиптического интеграла. Если v есть скорость на свободной линии тока, то $\zeta = v$ при $W = 0$, откуда $\zeta^4 + 2\lambda\zeta^2 + 1 = (\zeta^2 - v^2)\ (\zeta^2 - v^{-2})$ и $\lambda = -\frac{1}{2}(v^2 + v^{-2})$. По уравнению Бернулли $Q = v^2 - 1$, откуда $\lambda = \frac{1}{2}\left[(1+Q) + (1+Q)^{-1}\right]$. С помощью этих формул легко найти коэффициент C_D как функцию Q.

Другое важное течение Гельмгольца с условием $Q > 0$ было построено в 1946 г. Эфросом и, независимо от него, Гильбаргом и Роком [1]). Вместо симметричной каверны оно имеет *возвратную* струю (см. рис. 15, *б*) [2]). Возвратные струи наблюдались экспериментально, хотя они, по-видимому, образуются лишь

[1]) См. [17], гл. III, § 8, по поводу литературы и подробностей вычислений.

[2]) См. [16*], подробности в [17*]. — *Прим. ред.*

время от времени и неустойчивы [1]). Поэтому модель возвратной струи представляет особый интерес с физической точки зрения.

Позади выпуклых тел можно построить также «заостренные» каверны при $Q < 0$, хотя в свое время считали, что это невозможно [2]). Однако такие каверны вовсе не похожи на наблюдаемые, образцы которых показаны на фото I и фото II (см. § 51). Сохранить повышенное давление в устойчивой каверне (или в следе конечной длины), по-видимому, очень трудно.

§ 45. Криволинейные препятствия

Для математического аппарата, описанного выше, существенно то, что нам известны *специальные* конформные отображения и интегралы от *специального* вида функций. Хотя этот аппарат тщательно разработан и пригоден для решения многих задач с полигональными препятствиями (см. [17], гл. II, III и V), он, вообще говоря, не пригоден для исследования кавитационного обтекания *криволинейных* препятствий.

Создание быстродействующих вычислительных машин дало возможность подойти по-другому к этой проблеме, пользуясь *общими* теоретико-функциональными методами. Хотя такой подход до сих пор успешно применялся лишь к *плоским* течениям и хотя ниже мы будем рассматривать только такие приложения, подобные методы вполне могут быть применимы к осесимметричным и даже к произвольным струйным течениям.

В качестве иллюстрации этого современного подхода мы рассмотрим общий случай криволинейного препятствия, симметрично расположенного в бесконечном потоке, как показано на рис. 16. Мы снова будем предполагать, что смачиваемый участок $\overset{\frown}{ACB}$ поверхности препятствия расположен вертикально, и выберем единицы измерений так, чтобы на свободной границе было выполнено условие $|\zeta| = 1$.

Следуя Леви-Чивита [33], отобразим конформно и однозначно односвязную область течения на внутренность полукруга Γ:

$$|t| < 1, \qquad \operatorname{Im}\{t\} > 0. \tag{17}$$

---

[1]) В задней части каверны за осесимметричным препятствием может образоваться также пара вихрей с пустой внутренней областью ([42], стр. 230).

[2]) См. работу [17], гл. V, § 10, 14, а также работу [2], стр. 58. [Случай заостренной каверны перед пластинкой был рассмотрен С. А. Чаплыгиным еще в 1899 г. [18*]. Задача о заостренной каверне за обтекаемым клином также была решена С. А. Чаплыгиным [19*]. — *Прим. ред.*]

Из основной теоремы о конформных отображениях [1]) следует, что имеется в точности одно такое отображение $t = f(z)$ области течения на внутренность полукруга Г, переводящее точки A, B, C соответственно в точки 1, —1, i. Очевидно, что функция $f(z)$ отображает *свободные* линии тока на *диаметр*, расположенный на действительной оси, а смачиваемый участок поверхности *препятствия* — на *полуокружность* $t = e^{i\sigma}(0 < \sigma < \pi)$. (В этом случае мы используем обозначения, отличающиеся от § 38—40.)

Чтобы получить выражение для комплексного потенциала,

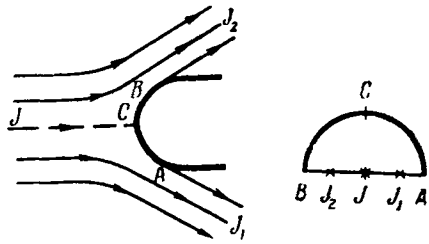


Рис. 16. Обтекание криволинейного препятствия.

удобно отобразить область Г на верхнюю полуплоскость посредством конформного преобразования

$$T = -\frac{t + t^{-1}}{2}, \quad \text{так что} \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{1 - t^{-2}}{2}. \tag{18}$$

Тогда комплексный потенциал, очевидно, задается так:

$$W = \frac{MT^2}{2}, \qquad \frac{dW}{dT} = MT, \qquad M > 0, \tag{18'}$$

где M — некоторая положительная постоянная. Это следует из того, что формула (18′) позволяет отобразить область течения на плоскость с разрезом, причем точка разветвления $t = i$ попадает в точку $W = T = 0$, а точка на бесконечности $t = 0$ — в точку $W = T = \infty$.

Теперь рассмотрим функцию $(i - t)/(i + t) = (1 + it)/(1 - it)$. Модуль ее равен единице, если t — действительное число; ее аргумент на участке $\widehat{AC}$ равен $\pi/2$, на участке $\widehat{CB}$ равен

[1]) Bieberbach L., Lehrbuch der Funktionentheorie, Springer, Leipzig, 1923, т. 1, стр. 61. По поводу принципа отражения Шварца см. там же, стр. 225. [На русском языке см., например, Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, ГИТТЛ, М.—Л., 1950; или Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, М.—Л., 1951. — *Прим. перев.*]

$-\pi/2$, в точке C имеется скачок аргумента $-\pi$. Новая функция $\Omega(t) = \theta + i\tau$, определенная формулами

$$\zeta = \left(\frac{1+it}{1-it}\right) e^{-i\Omega(t)}, \qquad \zeta^{-1} = \left(\frac{1-it}{1+it}\right) e^{i\Omega(t)}, \tag{19}$$

также аналитическая и регулярная функция внутри области Г. На свободной границе, где t — действительное число, имеем равенство $|1 + it| = |1 - it|$, и следовательно, можно записать соотношение

$$1 = |\zeta| = \left|\frac{1+it}{1-it}\right| e^{\tau(t)} = \tau(t). \tag{19'}$$

Поэтому функция $\tau(t)$ обращается в нуль на диаметре полукруга Г, т. е. функция $\Omega(t)$ *действительна, когда действительно* t.

По принципу симметрии Шварца (см. прим. 1) на стр. 93) функцию $\Omega(t)$ можно аналитически продолжить на внутренность единичного круга $|t| < 1$. Поэтому в рассматриваемом нами симметричном случае (ζ и $i\Omega(t)$ действительные на мнимой оси t, являющейся осью симметрии) мы можем написать равенство

$$\Omega(t) = a_1 t + a_3 t^3 + a_5 t^5 + \ldots, \tag{20}$$

где все a_i действительные числа, причем радиус сходимости ряда (20) не меньше единицы. Для неподвижной границы $|t| = 1$ с помощью довольно тонких рассуждений можно доказать, что функция $\Omega(t)$ даже *непрерывна* ([17], гл. VI, стр. 135). Не строго выражаясь, множитель $(1 - it)/(1 + it)$ «снимает» простой полюс для функции ζ^{-1} (нуль для функции ζ) в критической точке.

Обратно, для данной функции (20) с радиусом сходимости, равным единице или больше единицы, уравнения (19) и

$$z = \int_t^t \zeta^{-1}\left(\frac{dW}{dT}\right)\left(\frac{dT}{dt}\right) dt = \frac{M}{4}\int_t^t \zeta^{-1}(t - t^{-3})\, dt \tag{21}$$

определяют течение, разделяющееся на две симметричные части позади гладкого препятствия $\widehat{ACB}$, имеющего непрерывную касательную. Это приводит к классическому результату Леви-Чивита.

Теорема 1. *Течениям, разделяемым на две симметричные части симметричным препятствием в бесконечном потоке, однозначно соответствуют различные функции вида* (20), *регулярные при* $|t| < 1$ *и непрерывные при* $|t| = 1$, *и постоянные* M. *Это соответствие задается уравнениями* (19), (20) и (21).

§ 46. Прямая задача

Теорема 1 позволяет решить *обратную* задачу — найти класс *всех* плоских течений бесконечного потока, разделенного на симметричные части криволинейным препятствием. Теперь мы обратимся к прямой задаче: найти, какова функция $\Omega(t)$ для данного двумерного препятствия P, симметрично расположенного в бесконечном потоке. Мы покажем, что эта задача эквивалентна решению нелинейного интегрального уравнения.

В принципе можно очень просто выразить все свойства течения с помощью функции $\Omega(t)$. Так, вдоль неподвижной границы P ($t = e^{i\sigma}$ в плоскости t) для $\Omega = \theta + i\tau$ запишем равенства

$$\theta = a_1 \cos\sigma + a_3 \cos 3\sigma + a_5 \cos 5\sigma + \dots, \tag{22а}$$

$$\tau = a_1 \sin\sigma + a_3 \sin 3\sigma + a_5 \sin 5\sigma + \dots. \tag{22б}$$

Нам будет удобно рассматривать также производную

$$\lambda(\sigma) = -d\theta/d\sigma = a_1 \sin\sigma + 3a_3 \sin 3\sigma + a_5 \sin 5\sigma + \dots, \tag{22в}$$

предполагая в соответствии с гипотезой (Е) из § 1, что выписанные ряды Фурье удовлетворительно сходятся в случае достаточно «гладких» препятствий.

Мы покажем теперь, что θ отличается на величину $\frac{\pi}{2}$ от направления φ касательной к препятствию. Так как $\arg dz/dT = \arg\zeta^{-1} + \arg dW/dT$ и $\arg dz/dT = \varphi$ (исключая критическую точку C), то очевидно, что $\arg\zeta^{-1}$ равен $\varphi - \pi$ на участке $\widehat{AC}$ и равен φ на участке $\widehat{CB}$. С другой стороны, в силу формулы (19) и сделанных перед этим замечаний относительно величины $\arg[(1 + it)/(1 - it)]$ значение $\arg\zeta^{-1}$ равно $\theta - \pi/2$ на участке $\widehat{AC}$ и равно $\theta + \pi/2$ на участке $\widehat{CB}$. Оба эти соотношения показывают, что вдоль участка ACB $\theta = \varphi - \pi/2$.

Длину дуги препятствия l можно найти при помощи соотношения (21), из которого следует равенство

$$dl = |\zeta^{-1}| \cdot |dW/dT| \cdot |dT/dt| \cdot d\sigma \quad \text{на} \quad t = e^{i\sigma}.$$

Применяя формулу (19′) и элементарную тригонометрию, получаем соотношение

$$|\zeta^{-1}| = \left|\frac{1 - it}{1 + it}\right| \cdot |e^{i\theta - \tau}| = \left|\frac{1 + \sin\sigma}{\cos\sigma}\right| e^{-\tau}.$$

Аналогично, так как $dW/dt = (t - t^{-3})$, как и в формуле (21), находим соотношение

$$\left|\frac{dW}{dt}\right| = M \cdot |\cos\sigma \sin\sigma|, \quad M = \text{const}.$$

Сравнивая предыдущие формулы, окончательно получаем следующий результат:

$$dl = M\nu(\sigma)\, e^{-\tau(\sigma)}\, d\sigma, \qquad \nu(\sigma) = |\sin\sigma\,(1+\sin\sigma)|. \tag{23}$$

Поэтому для *кривизны*, определяемой равенством $\varkappa = -d\varphi/dl = -d\theta/dl$, получаем формулу

$$\varkappa = \frac{\lambda(\sigma)\, e^{\tau(\sigma)}}{M\nu(\sigma)}, \tag{24}$$

что можно сравнить с формулами (22в), (23).

Пусть теперь P — любое гладкое симметричной формы препятствие, имеющее *кривизну постоянного знака* (т. е. без точек перегиба), и пусть $\varkappa = K(\theta)$ выражает кривизну как функцию угла $\theta = \varphi - \pi/2$, на который касательная поворачивается за точкой C. Тогда, преобразуя формулу (24), получим выражение

$$\lambda(\sigma) = M\nu(\sigma)\, e^{-\tau(\sigma)} K(\theta) = M\nu(\sigma)\, e^{-D\lambda} K(J\lambda), \tag{25}$$

где линейные *операторы* D и J определяют функции $\tau(\sigma)$ и $\theta(\sigma)$ через $\lambda(\sigma)$ по формулам (22а)—(23в). (Действительно, $J\lambda = \int_{\pi/2}^{\sigma} \lambda(\sigma)\, d\sigma$, тогда как $D\lambda$ является «преобразованием Дини» функции $\lambda(\sigma)$ при соответствующем сингулярном интегральном ядре $D(\sigma, \sigma')$; см. работу [17], стр. 136.) Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы течение, описанное в теореме* 1, *соответствовало препятствию, имеющему кривизну* $\varkappa = K(\theta)$ *постоянного знака, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение* (25).

При малых значениях константы M интегральное уравнение (25) можно разрешить прямой итерацией функционального преобразования

$$\lambda_{n+1}(\sigma) = S[\lambda_n(\sigma)] = M\nu(\sigma)\, e^{-D\lambda_n} K(J\lambda_n). \tag{26}$$

При больших значениях M сходится «усредненная итерация» относительно соответствующим образом выбранного «весового» множителя ε, т. е. можно итерировать по формуле

$$\lambda_{n+1}(\sigma) = (1-\varepsilon)\lambda_n(\sigma) + \varepsilon S[\lambda_n(\sigma)]. \tag{26'}$$

Таким образом, используя современные быстродействующие вычислительные машины, можно эффективно разрешить интегральное уравнение (25), при заданном положительном значении M; подробности можно найти в литературе [1]).

§ 47. Неопределенность точки отрыва

Соответствие между интегральными уравнениями (25) и препятствиями P не является взаимно однозначным из-за наличия параметра M. Поэтому возникает основной вопрос: в каком смысле (если о нем можно говорить) корректно поставлена задача Гельмгольца, рассмотренная в § 36? Этот трудный вопрос еще не разрешен полностью даже для плоских течений, имеющих ось симметрии.

Таким образом, как показал в 1911 г. А. Вилла [22], даже течение Кирхгофа, описанное в § 39, не является единственным решением задачи Гельмгольца для плоской пластинки в бесконечном потоке. Для конфигурации, изображенной на рис. 17, появляется однопараметрическое семейство других, топологически отличающихся возможных решений [2]) (см. (D), § 1).

В случае круглых препятствий возникает еще более существенная неопределенность, даже если предположить, что топология течения обусловливает наличие единственной бесконечной каверны позади препятствия. Еще до того как удалось доказать строгие теоремы, М. Бриллюэн установил, что *положение точки отрыва является неопределенным*. Этот факт тесно связан с неопределенностью постоянной M в соотношении (25): вообще говоря, константа M соответствует «смоченной длине», равной расстоянию от точки раздела C до точек отрыва A и B, и возрастает с увеличением участков $\widehat{CA} = \widehat{CB}$. Поэтому задача Гельмгольца для круглых препятствий *не* является корректно поставленной, даже если задаться топологией течения.

---

[1]) Работа [17], гл. IX, § 8; Birkhoff G., Goldstine H. H., Zarantonello E. H., *Rend. Sem. Mat. Torino*, 13 (1954), 205—223. [Первая конкретная задача об обтекании с отрывом струй криволинейного препятствия (дуга круга при прямом ударе) была решена А. И. Некрасовым [20*] методом последовательных приближений с доказательством сходимости и единственности. Затем появился еще ряд работ, продолжающих и обобщающих исследования А. И. Некрасова, см. [17*]. Метод Н. Е. Жуковского был обобщен на случай струйного обтекания произвольного числа криволинейных дуг Л. И. Седовым [7*]. Широкие теоремы существования и единственности для струйных течений были доказаны М. А. Лаврентьевым [21*] — *Прим. ред.*]

[2]) См. работу [17], гл. V, § 3. Zarantonello E. H., *J. de Math.*, 33 (1954), 29—80, показал, что других возможностей не существует.

Однако если предположить, что выполняется условие Бриллюэна (§ 43), то задача бесконечной каверны становится корректно поставленной, по крайней мере в некоторых случаях. Следуя Лерэ [35], определим «скобку» как препятствие P, кривизна которого $\varkappa(\theta)$ возрастает [1]), как показано на рис. 18. Лерэ доказал, что всякая симметричная скобка P имеет единственную пару «точек Бриллюэна» A_0, B_0, обладающих следующим свойством: кривизна свободных линий тока в точках отрыва A, B при любом симметричном обтекании части P равна $+\infty$, конечна или равна $-\infty$ в зависимости от того, происходит ли от-

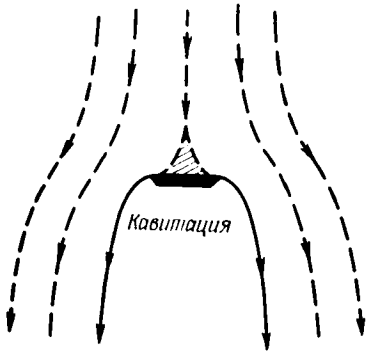


Рис. 17. Обтекание плоской пластинки, по Вилла.

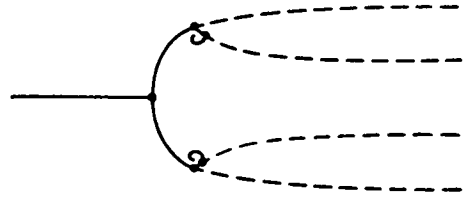


Рис. 18. Обтекание «скобки» по Гельмгольцу.

рыв перед точками A_0, B_0, в точках A_0, B_0 или позади точек A_0, B_0 соответственно. В первом случае ввиду бесконечной кривизны свободные линии тока должны проходить сквозь скобку, что невозможно. В третьем случае, очевидно, нарушается условие Бриллюэна. Следовательно, если мы определим *задачу Гельмгольца — Бриллюэна,* как задачу нахождения Эйлеровых течений, которые ограничены неподвижными препятствиями и свободными линиями тока, удовлетворяющими условию Бриллюэна, то получим следующее утверждение.

В случае бесконечной симметричной каверны позади скобки задача Гельмгольца — Бриллюэна поставлена корректно и отрыв происходит в точках Бриллюэна A_0, B_0. Интересно было бы точно определить класс симметричных препятствий, для которых задача Гельмгольца — Бриллюэна поставлена корректно.

Мы показали выше, что в случае скобок условие Бриллюэна эквивалентно условию конечности кривизны свободной линии

[1]) По теореме о четырех вершинах, круг есть единственная «скобка», ограничивающая гладкую выпуклую область.

тока. В литературе не раз встречалось утверждение, что последнее условие («гладкого отрыва» — см. работу [17], гл. VI, § 6) представляет собой «физически разумную» замену условия Бриллюэна. Однако в силу условий (14) и особенно в силу того, что при обтекании по Кирхгофу плоской пластинки нарушается условие «гладкого отрыва», условие Бриллюэна кажется нам предпочтительным [1]).

§ 48. Осесимметричные течения Гельмгольца

Впервые осесимметричные течения Гельмгольца были строго математически проанализированы в 1946 г., когда Левинсон [2]) дал строгое исследование асимптотических очертаний каверны. Предполагая, что для них удовлетворяется условие

$$y = x^s g(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{xg'(x)}{g(x)} = 0, \tag{27}$$

Левинсон доказал, что $s = {}^1/_2$ и что

$$C(\ln x)^{-1/4-\varepsilon} < g(x) < C(\ln x)^{-1/4+\varepsilon}$$

для некоторой постоянной C, при всех $\varepsilon > 0$ и при достаточно больших x. Если условие (27) усилить до вида $xg'(x)/g(x) = O(1/\ln x)$, то можно получить соотношения

$$y \sim Cx^{1/2}(\ln x)^{-1/4} \left(\text{т. е. } \left\{\lim_{x\to\infty} \frac{y(\ln x)^{1/4}}{\sqrt{x}}\right\} = \text{const}\right) \tag{28}$$

и лобовое сопротивление можно выразить по формуле

$$D = \frac{\pi\rho C^4 v^2}{8}.$$

Однако Левинсон не доказал, что такие каверны существуют.

Первое доказательство существования *конечных* осесимметричных каверн было дано в 1952 г. Гарабедяном, Шиффером и Леви [24]. Пользуясь принципом Рябушинского о том, что свободные линии тока экстремизируют присоединенную массу относительно вариаций, оставляющих постоянным объем каверны, а также пользуясь новым результатом о том, что «симметризация» уменьшает присоединенную массу, эти авторы доказали существование осесимметричных течений Гельмгольца «типа

[1]) См. также [2], § 5, где указанные вопросы впервые были рассмотрены с такой точки зрения.

[2]) Levinson N., *Annals of Math.*, 47 (1946), 704—730. (См. также [17*]. — *Прим. ред.*)

Рябушинского» (рассмотренных в § 44) для профилей произвольного очертания (и для любого $Q > 0$). Существование же течений Гельмгольца с бесконечными осесимметричными кавернами не доказано детально, хотя показано, что это достаточно правдоподобно.

Единственность бесконечной осесимметричной каверны была доказана для препятствий с данной точкой отрыва Гильбаргом и Серрином. Доказательство основано на методе сравнения, впервые введенном М. А. Лаврентьевым [1]).

Замечательным в указанных доказательствах является то, что в них используются существенно новые идеи. Это оказалось необходимым, так как аппарат конформных отображений, традиционно используемый в случае плоских течений, здесь уже не пригоден.

Любопытно также, что хотя существование и единственность плоских течений со свободными границами были доказаны более чем через 50 лет, после того как были построены первые нетривиальные примеры таких течений, мы до сих пор не знаем ни одного представляющего интерес аналитического («точного») осесимметричного течения Гельмгольца [2]), и это несмотря на то, что мы располагаем теоремами существования и единственности.

Поэтому при анализе частных осесимметричных течений Гельмгольца приходится опираться на приближенные методы. Из применявшихся до сих пор методов наиболее остроумным является метод разложения по степеням числа подобия, разработанный Гарабедяном [25] [3]). В то время как предыдущие авторы получили для коэффициента сжатия струи, вытекающей из круглого отверстия в плоской пластинке, величину 0,61, вычисления Гарабедяна привели к результату 0,58.

§ 49. Законы сохранения

Математические доказательства результатов, сформулированных в § 48, крайне сложны. Полезные результаты относительно осесимметричных течений Гельмгольца часто можно получить гораздо проще, обращаясь к физическим законам сохранения, как это и будет сделано ниже.

---

[1]) Gilbarg D., *J. Rat. Mech. Anal.*, **1** (1952), 309—320 и Serrin J. B., там же, 2 (1953), 563—575; см. также [17], гл. IV, § 12—14. Работу М. А. Лаврентьева см. в *Математическом сборнике*, **46** (1938), 391—458.

[2]) По поводу анализа приближенных решений см. Birkhoff G., Symposium on Naval Hydrodynamics, August, 25—29, 1958 [32].

[3]) Критические замечания по этой работе см. *РФЖ «Механика»*, № 5, Б 309, 1963 г. — *Прим. ред.*